

MÉTHODE

DES

MOINDRES CARRÉS.

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

MÉTHODE

DES

MOINDRES CARRÉS.

MÉMOIRES SUR LA COMBINAISON DES OBSERVATIONS,

PAR CH.-FR. GAUSS.

TRADUITS EN FRANÇAIS ET PUBLIÉS AVEC L'AUTORISATION DE L'AUTEUR,

PAR J. BERTRAND.

PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, nº 55.

1855



AVERTISSEMENT.

J'ai réuni dans cet ouvrage les divers écrits publiés par Gauss sur la *Méthode des moindres carrés.*

L'illustre géomètre, que les sciences viennent de perdre, attachait une grande importance à cette partie de ses travaux, et la meilleure manière de combiner les observations était, à ses yeux, *un des problèmes les plus importants de la philosophie naturelle.*

Gauss n'ignorait pas les critiques dont sa théorie a été l'objet; mais son opinion bien arrêtée était que les géomètres adopteraient entièrement ses idées lorsque ses Mémoires, aujourd'hui fort rares, se seraient répandus davantage. C'est pour cela, sans doute, qu'il a bien voulu m'écrire qu'il me verrait avec le plus grand plaisir en publier la traduction. Ces Mémoires forment un Traité complet de la combinaison des observations, qui n'exige ni commentaires ni annotations. Les questions de priorité sur lesquelles se sont engagées des discussions assez vives, y sont traitées brièvement, mais de la manière la plus nette et la plus loyale. J'ai donc dû me borner au rôle de traducteur : c'était le seul qui fût utile, et le seul d'ailleurs que Gauss m'eût autorisé à prendre.

J. BERTRAND.

TABLE DES MATIÈRES.

NOTES.

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

THÉORIE
DE
LA COMBINAISON DES OBSERVATIONS
QUI EXPOSE AUX MOINDRES ERREURS,

PAR CH.-FRÉDÉRIC GAUSS.

PREMIÈRE PARTIE,

PRÉSENTÉE A LA SOCIÉTÉ ROYALE DE GOTTINGUE, LE 15 FÉVRIER 1821.

1.

Quelque soin que l'on apporte aux observations qui concernent la mesure des grandeurs physiques, elles sont forcément soumises à des erreurs plus ou moins considérables. Ces erreurs, dans le plus grand nombre des cas, ne sont pas simples, mais découlent à la fois de plusieurs sources distinctes qu'il est bon de distinguer en deux classes.

Certaines causes d'erreurs dépendent, pour chaque observation, de circonstances variables et indépendantes du résultat que l'on obtient : les erreurs qui en proviennent sont nommées *irrégulières* ou *fortuites*, et de même que les circonstances qui les produisent, leur valeur n'est pas susceptible d'être soumise au calcul. Telles sont les erreurs qui naissent de l'imperfection de nos organes et toutes celles qui sont dues à des causes extérieures irrégulières, comme, par exemple, les trépidations de l'air qui rendent la vision moins nette; quelques-unes des erreurs dues à l'imperfec-

tion inévitable des meilleurs instruments appartiennent à la même catégorie. Nous citerons, par exemple, la rugosité de la partie intérieure du niveau, le défaut de rigidité absolue, etc.

Il existe, au contraire, d'autres causes qui, dans toutes les observations de même nature, produisent une erreur identique, ou dépendant de circonstances essentiellement liées au résultat de l'observation. Nous appellerons les erreurs de cette catégorie, des erreurs *constantes* ou *régulières*.

Il est du reste évident que cette distinction est jusqu'à un certain point relative et dépend du sens plus ou moins large que l'on veut attacher à l'idée d'observations de *même nature*. Par exemple, si l'on répète indéfiniment la mesure d'un même angle, les erreurs provenant d'une division imparfaite du limbe appartiendront à la classe des erreurs constantes. Si, au contraire, on mesure successivement plusieurs angles différents, les erreurs dues à l'imperfection de la division seront regardées comme fortuites tant que l'on n'aura pas formé la table des erreurs relatives à chaque division.

2.

Nous excluons de nos recherches la considération des erreurs régulières. C'est à l'observateur qu'il appartient de rechercher avec soin les causes qui peuvent produire une erreur constante, pour les écarter s'il est possible, ou tout au moins apprécier leur effet, afin de le corriger sur chaque observation, qui donnera alors le même résultat que si la cause constante n'avait pas existé. Il en est tout autrement des erreurs irrégulières : celles-là, par leur nature, se refusent à tout calcul, et il faut bien les tolérer dans les observations. On peut cependant, par une combinaison habile des résultats, réduire autant que possible leur influence. C'est à cette question importante que sont consacrées les recherches suivantes.

3.

Les erreurs qui, dans des observations de même espèce, proviennent d'une cause simple et déterminée se trouvent renfermées entre certaines limites que l'on pourrait sans aucun doute assigner, si la nature de cette cause était elle-même *parfaitement* connue. Dans la plupart des cas, toutes les erreurs comprises entre ces limites extrêmes doivent être regardées comme possibles. Une connaissance approfondie de chaque cause apprendrait si toutes ces erreurs ont une facilité égale ou inégale, et, dans le second cas, quelle est la probabilité relative de chacune d'elles. La même remarque s'applique à l'erreur totale qui provient de la réunion de plusieurs erreurs simples. Cette erreur sera, elle aussi, renfermée entre deux limites dont l'une sera la somme des limites supérieures, l'autre celle des limites inférieures, correspondant aux erreurs simples. Toutes les erreurs comprises entre ces limites seront possibles, et chacune pourra résulter, d'une infinité de manières, de valeurs convenables attribuées aux erreurs partielles. On comprend néanmoins, en écartant les difficultés purement analytiques, qu'il y a possibilité d'apprécier la probabilité plus ou moins grande de chaque résultat, si l'on suppose connues les probabilités relatives à chacune des causes simples.

Certaines causes pourtant produisent des erreurs qui ne peuvent pas varier suivant une loi continue, mais qui, au contraire, sont susceptibles d'un nombre fini de valeurs : nous pouvons citer, comme exemple, les erreurs qui proviennent de la division imparfaite des instruments (si toutefois on veut les classer parmi les erreurs fortuites), car le nombre des divisions, dans un instrument donné, est essentiellement fini. Il est clair néanmoins que, si toutes les causes qui concourent à produire l'erreur totale ne sont pas supposées dans ce cas, leur somme formera une série soumise à la loi de continuité, ou, tout au moins, plusieurs

séries distinctes, s'il arrive qu'en plaçant par ordre de grandeur toutes les valeurs possibles des erreurs discontinues, la différence entre deux termes consécutifs de la série soit moindre que la différence entre les limites extrêmes des erreurs soumises à la loi de continuité. Dans la pratique, un pareil cas ne se présentera presque jamais; il supposerait des défauts trop grossiers dans la construction de l'instrument.

4.

Désignons par la notation $\varphi(x)$ la facilité relative d'une erreur x : on doit entendre par là, à cause de la continuité des erreurs, que $\varphi(x)\,dx$ est la probabilité que l'erreur soit comprise entre les limites x et $x + dx$. Il n'est pas possible, en général, d'assigner la forme de la fonction φ, et l'on peut même affirmer que cette fonction ne sera jamais connue dans la pratique. On peut néanmoins établir plusieurs caractères généraux qu'elle doit nécessairement présenter : $\varphi(x)$ est évidemment une fonction discontinue; elle s'annule pour toutes les valeurs de x non comprises entre les erreurs extrêmes. Pour toute valeur comprise entre ces limites, la fonction est positive (en excluant le cas indiqué à la fin du paragraphe précédent); dans la plupart des cas, les erreurs égales et de signes contraires seront également probables, et l'on aura

$$\varphi(x) = \varphi(-x).$$

Enfin, comme les petites erreurs sont plus facilement commises que les grandes, $\varphi(x)$ sera en général maximum pour $x = 0$ et diminuera sans cesse lorsque x croîtra.

L'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

exprime la probabilité pour que l'erreur, encore inconnue, tombe entre les limites a et b. On en conclut que la valeur de cette intégrale prise entre les limites extrêmes des erreurs possibles sera toujours égale à l'unité. Et comme $\varphi(x)$ est

nulle pour les valeurs non comprises entre ces limites, on peut dire, dans tous les cas, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1.$$

5.

Considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx$$

et représentons sa valeur par k. Si les causes d'erreur sont telles, qu'il n'y ait aucune raison pour que deux erreurs égales et de signes contraires aient des facilités inégales, on aura

$$\varphi(x) = \varphi(-x),$$

et, par suite,

$$k = 0.$$

Nous en conclurons que, si k ne s'évanouit pas et a, par exemple, une valeur positive, il existe nécessairement une cause d'erreur qui produit uniquement des erreurs positives ou qui, tout au moins, les produit plus facilement que les erreurs négatives. Cette quantité k, qui est la moyenne de toutes les erreurs possibles, ou encore la valeur moyenne de x, peut être désignée commodément sous le nom de *partie constante de l'erreur*. Du reste, on prouve facilement que la partie constante de l'erreur totale est la somme des parties constantes des erreurs simples qui la composent.

Si la quantité k est supposée connue et qu'on la retranche du résultat de chaque observation, en désignant par x' l'erreur de l'observation ainsi corrigée, et la probabilité correspondante par $\varphi'(x')$, on aura

$$x' = x - k, \qquad \varphi'(x') = \varphi(x)$$

et, par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x'\varphi'(x')\,dx' = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx - k\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = k - k = 0;$$

en sorte que les erreurs des observations corrigées n'ont pas de *partie constante*. Ce qui, du reste, semble évident à priori.

6.

La valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx,$$

c'est-à-dire la valeur moyenne de x, fait connaître l'existence ou la non-existence d'une erreur constante, ainsi que la valeur de cette erreur; de même l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)\,dx,$$

c'est-à-dire la valeur moyenne de x^2, paraît très-propre à définir et à mesurer, d'une manière générale, l'incertitude d'un système d'observations; de telle sorte qu'entre deux systèmes d'observations inégalement précises, on devra regarder comme préférable celui qui donne à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)\,dx$$

une moindre valeur. Si l'on objecte que cette convention est arbitraire et ne semble pas nécessaire, nous en convenons volontiers. La question qui nous occupe a, dans sa nature même, quelque chose de vague et ne peut être bien précisée que par un principe jusqu'à un certain point arbitraire. La détermination d'une grandeur par l'observation peut se comparer, avec quelque justesse, à un jeu dans lequel il y aurait une perte à craindre et aucun gain à espérer : chaque erreur commise étant assimilée à une perte que l'on fait, la crainte relative à un pareil jeu doit s'exprimer par la perte probable, c'est-à-dire par la somme des produits des diverses pertes possibles par leurs probabilités respectives.

Mais quelle perte doit-on assimiler à une erreur déterminée? C'est ce qui n'est pas clair en soi; cette détermination dépend en partie de notre volonté. Il est évident, d'abord, que la perte ne doit pas être regardée comme proportionnelle à l'erreur commise; car, dans cette hypothèse, une erreur positive représentant une perte, l'erreur négative devrait être regardée comme un gain : la grandeur de la perte doit, au contraire, s'évaluer par une fonction de l'erreur dont la valeur soit toujours positive. Parmi le nombre infini de fonctions qui remplissent cette condition, il semble naturel de choisir la plus simple, qui est, sans contredit, le carré de l'erreur, et, de cette manière, nous sommes conduit au principe proposé plus haut.

Laplace a considéré la question d'une manière analogue, mais en adoptant, pour mesure de la perte, l'erreur elle-même prise positivement. Cette hypothèse, si nous ne nous faisons pas illusion, n'est pas moins arbitraire que la nôtre : faut-il, en effet, regarder une erreur double comme plus ou moins regrettable qu'une erreur simple répétée deux fois, et faut-il, par suite, lui assigner une importance double ou plus que double? C'est une question qui n'est pas claire, et sur laquelle les arguments mathématiques n'ont aucune prise; chacun doit la résoudre à son gré. On ne peut nier pourtant que l'hypothèse de Laplace ne s'écarte de la loi de continuité et ne soit, par conséquent, moins propre à une étude analytique; la nôtre, au contraire, se recommande par la généralité et la simplicité de ses conséquences.

7.

Posons, en conservant les notations précédentes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, x^2\, dx = m^2 :$$

nous appellerons m l'*erreur moyenne à craindre* ou, sim-

plement, l'*erreur moyenne* des observations considérées. Nous ne limitons pas, du reste, cette dénomination au résultat immédiat des observations, mais nous l'étendons, au contraire, à toute grandeur qui peut s'en déduire d'une manière quelconque. Il faut bien se garder de confondre cette erreur moyenne avec la moyenne arithmétique des erreurs, dont il est question dans l'art. 5.

Si nous comparons plusieurs systèmes d'observations ou plusieurs grandeurs résultant d'observations auxquelles on n'accorde pas la même précision, nous regarderons leur *poids* relatif comme inversement proportionnel à m^2, et leur *précision* comme inversement proportionnelle à m. Afin de pouvoir représenter les poids par des nombres, on devra prendre, pour unité, le poids d'un certain système d'observations arbitrairement choisi.

8.

Si les erreurs des observations ont une partie constante, en la retranchant de chaque résultat obtenu, l'erreur moyenne diminue, le poids et la précision augmentent. En conservant les notations de l'art. 5, et désignant par m' l'erreur moyenne des observations corrigées, on aura en effet

$$m'^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x'^2 \varphi'(x')\, dx' = \int_{-\infty}^{\infty} (x-k)^2 \varphi(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)\, dx - 2k \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\, dx + k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$$
$$= m^2 - 2k^2 + k^2 = m^2 - k^2.$$

Si, au lieu de retrancher de chaque observation le nombre k, on retranchait un autre nombre l, le carré de l'erreur moyenne deviendrait

$$m^2 - 2kl + l^2 = m'^2 + (l-k)^2.$$

9.

Soient λ un coefficient déterminé et μ la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\lambda m}^{\lambda m} \varphi(x)\,dx,$$

μ sera la probabilité que l'erreur d'une certaine observation soit moindre que λm en valeur absolue; $1-\mu$ sera, au contraire, la probabilité que cette erreur surpasse λm. Si, pour $\mu = \frac{1}{2}$, λm a la valeur ρ, il y aura probabilités égales pour que l'erreur soit plus petite ou plus grande que ρ : ρ pourra donc être appelé l'*erreur probable*. La relation qui existe entre λ et μ dépend de la nature de la fonction φ, qui est inconnue dans la plupart des cas. Il est intéressant d'étudier cette relation dans quelques cas particuliers.

I. Si les limites extrêmes des erreurs possibles sont $+a$ et $-a$, et si, entre ces limites, toutes les erreurs sont également probables, la fonction $\varphi(x)$ sera constante entre ces mêmes limites, et, par conséquent, égale à $\frac{1}{2a}$. Par suite, on aura

$$m = a\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}},$$

tant que λ sera inférieur ou égal à $\sqrt{3}$; enfin,

$$\rho = m\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}8660254\,m,$$

et la probabilité pour que l'erreur ne surpasse pas l'erreur moyenne est

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773503.$$

II. Si $-a$ et $+a$ sont encore les limites des erreurs possibles, si l'on suppose, de plus, que la probabilité de ces mêmes erreurs aille en décroissant à partir de l'erreur 0

comme les termes d'une progression arithmétique, on aura

$$\varphi(x) = \frac{a - x}{a^2}$$

pour les valeurs de x comprises entre o et $+ a$, et

$$\varphi(x) = \frac{a + x}{a^2}$$

pour les valeurs comprises entre o et $-a$: de là on déduit

$$m = a\sqrt{\frac{1}{6}}, \quad \mu = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\lambda^2,$$

tant que λ est compris entre o et $\sqrt{6}$;

$$\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{6 - 6\mu},$$

tant que μ est compris entre o et 1; et, enfin,

$$\rho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0,7174389\,m.$$

Dans ce cas, la probabilité que l'erreur restera inférieure à l'erreur moyenne sera

$$\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} = 0,6498299.$$

III. Si nous supposons la fonction $\varphi(x)$ proportionnelle à $e^{-\frac{x^2}{h^2}}$ [ce qui, en réalité, n'est vrai qu'approximativement (*)], elle devra être égale à

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}};$$

on en conclut

$$m = h\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(voir *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, art. 28, *Mémoires de Gottingue*, tome II).

(*) Il faut se reporter, pour comprendre cette remarque, à un chapitre du *Theoria Motus Corporum cœlestium*, dans lequel M. Gauss montre que cette loi de probabilités est la plus vraisemblable que l'on puisse adopter. A la fin du volume nous reproduisons ce chapitre, dans lequel l'illustre auteur a fait connaître pour la première fois la méthode des moindres carrés.

J. B.

Si l'on désigne par Θz la valeur de l'intégrale

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}\,dz,$$

on aura

$$\mu=\Theta\left(\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Le tableau suivant donne quelques valeurs de cette quantité :

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1,0000000	0,6826895
1,0364334	0,7
1,2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3,2918301	0,999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Quoique la relation qui lie λ à μ dépende de la nature de la fonction φ, on peut cependant établir quelques résultats généraux, qui s'appliquent à tous les cas dans lesquels cette fonction ne sera pas croissante avec la valeur absolue de la variable x ; alors on aura les théorèmes suivants :

λ ne dépassera pas $\mu\sqrt{3}$ toutes les fois que μ sera inférieur à $\frac{2}{3}$;

λ ne dépassera pas $\frac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$, toutes les fois que μ surpassera $\frac{2}{3}$.

Lorsque $\mu = \frac{2}{3}$, les deux limites coïncident et λ ne peut pas être supérieur à $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Pour démontrer ce théorème remarquable, représentons par y la valeur de l'intégrale

$$\int_{-x}^{+x} \varphi(z)\, dz;$$

alors y sera la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre $-x$ et $+x$.

Posons

$$x = \psi(y), \quad d\psi(y) = \psi'(y)\, dy, \quad d\psi'(y) = \psi''(y)\, dy,$$

on aura

$$\psi(0) = 0 \quad \text{et}\; \psi'(y) = \frac{1}{\varphi(x) + \varphi(-x)};$$

on en conclut, en ayant égard aux hypothèses qui ont été faites, que, depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 1$, $\psi'(y)$ est toujours croissant, ou du moins n'est pas décroissant, et que, par suite, $\psi''(y)$ est toujours positif, ou du moins n'est pas négatif. Or nous avons

$$d.y\psi'(y) = \psi'(y)\, dy + y\psi''(y)\, dy,$$

par suite,

$$y\psi'(y) - \psi(y) = \int_0^y y\psi''(y)\, dy;$$

$y\psi'(y) - \psi(y)$ a donc une valeur constamment positive, ou du moins cette expression ne sera jamais négative. Il suit de là que $1 - \frac{\psi(y)}{y\psi'(y)}$ sera toujours positif et moindre que l'unité. Soit f la valeur de cette différence pour $y = \mu$; à cause de $\psi(\mu) = \lambda m$, on a

$$f = 1 - \frac{\lambda m}{\mu\psi'(\mu)},$$

d'où l'on conclut

$$\psi'(\mu)=\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}.$$

Cela posé, considérons la fonction

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}(y-\mu f),$$

que nous désignerons par $F(y)$, et posons

$$d.F(y)=F'(y)\,dy;$$

on aura évidemment

$$F(\mu)=\lambda m=\psi(\mu),$$
$$F'(\mu)=\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}=\psi'(\mu).$$

Or, puisque $\psi'(y)$ croît continuellement (ou du moins ne décroît pas, car c'est ainsi qu'on doit toujours l'entendre) lorsque y croît, et que, d'un autre côté, $F'(y)$ est constant, la différence

$$\psi'(y)-F'(y)=\frac{d[\psi(y)-F(y)]}{dy}$$

sera positive pour toutes les valeurs de y plus grandes que μ, et négative pour les valeurs de y plus petites que μ. On en conclut que la différence $\psi(y)-F(y)$ est toujours positive, et, par suite, $\psi(y)$ sera certainement plus grand que $F(y)$ en valeur absolue, tant que la fonction $F(y)$ sera positive, c'est-à-dire depuis $y=\mu f$ jusqu'à $y=1$. La valeur de l'intégrale

$$\int_{\mu f}^{1}[F(y)]^2\,dy$$

sera donc inférieure à celle de l'intégrale

$$\int_{\mu f}^{1}[\psi(y)]^2\,dy,$$

et à fortiori moindre que

$$\int_{0}^{1}[\psi(y)]^2\,dy,$$

c'est-à-dire moindre que m^2. Or la première de ces intégrales a pour valeur

$$\frac{\lambda^2 m^2 (1-\mu f)^3}{3\mu^2 (1-f)^2};$$

donc

$$\lambda^2 < \frac{3\mu^2 (1-f)^2}{(1-\mu f)^3},$$

f désignant, on ne l'a pas oublié, un nombre compris entre 0 et 1.

Si nous considérons f comme variable, la fraction

$$\frac{3\mu^2 (1-f)^2}{(1-\mu f)^3},$$

aura pour différentielle

$$-\frac{3\mu^2 (1-f)}{(1-\mu f)^4} (2 - 3\mu + \mu f)\, df:$$

cette fraction sera donc continuellement décroissante lorsque f croîtra de 0 à 1, et que l'on aura, en outre, $\mu < \frac{2}{3}$; sa valeur maximum correspondra à $f = 0$ et sera égale à $3\mu^2$, de sorte que, dans ce cas, le coefficient λ sera certainement inférieur, ou du moins ne sera pas supérieur à $\mu\sqrt{3}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Lorsqu'au contraire μ est plus grand que $\frac{2}{3}$, la valeur de la fonction sera maximum lorsque

$$2 - 3\mu + \mu f = 0,$$

c'est-à-dire lorsque

$$f = 3 - \frac{2}{\mu},$$

et cette valeur maximum sera

$$\frac{4}{9(1-\mu)};$$

par conséquent, dans ce cas, le coefficient λ n'est pas plus grand que $\frac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$, comme nous l'avions annoncé.

Faisons, par exemple,

$$\mu = \frac{1}{2};$$

alors λ ne peut pas surpasser $\sqrt{\frac{3}{4}}$, c'est-à-dire que l'erreur probable ne peut pas surpasser $0,8660254\,m$, à laquelle elle devient égale dans le premier cas examiné (art. 9) : on conclut facilement de notre théorème que μ n'est pas moindre que $\lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, tant que λ est moindre que $\sqrt{\frac{4}{3}}$, et qu'au contraire, il n'est pas inférieur à $1 - \frac{4}{9\lambda^2}$, lorsque λ est plus grand que $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

11.

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \varphi(x)\, dx,$$

se présentant dans plusieurs problèmes que nous aurons à traiter, il ne sera pas inutile de l'évaluer dans quelques cas particuliers.

Posons

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \varphi(x)\, dx = n^4.$$

I. Lorsque

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a},$$

pour les valeurs de x comprises entre $-a$ et $+a$, on a

$$n^4 = \frac{a^4}{5} = \frac{9}{5} m^4.$$

II. Lorsque

$$\varphi(x) = \frac{a \mp x}{a^2}$$

(IIe cas, art. 9), x étant encore compris entre $-a$ et $+a$, on a

$$n^4 = \frac{1}{15} a^4 = \frac{12}{5} m^4.$$

III. Dans le troisième cas, lorsque

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}},$$

on trouvera, d'après les résultats obtenus dans le Mémoire cité plus haut,

$$n^4 = \frac{3}{4} h^4 = 3 m^4.$$

On peut d'ailleurs démontrer qu'en restant dans les hypothèses admises au paragraphe précédent, le rapport $\frac{n^4}{m^4}$ n'est jamais inférieur à $\frac{9}{5}$.

12.

Désignons par x, x', x'', etc., les erreurs commises dans des observations de même espèce, et supposons que ces erreurs soient indépendantes les unes des autres. Soit, comme plus haut, $\varphi(x)$ la probabilité relative de l'erreur x; considérons une fonction rationnelle y, des variables x, x', x'', etc.

L'intégrale multiple

$$(1) \qquad \int \varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'')\ldots\, dx\, dx'\, dx''\ldots,$$

étendue à toutes les valeurs des variables x, x', x'', etc., pour lesquelles la valeur de y tombe entre les limites données o, η, représente la probabilité que la valeur de y soit

comprise entre o et η. Or cette intégrale est évidemment une fonction de η. Représentons sa différentielle par $\psi(\eta)\,d\eta$, de sorte que l'intégrale considérée soit égale à

$$\int_0^\eta \psi(\eta)\,d\eta,$$

et que, par conséquent, $\psi(\eta)$ représente la probabilité relative d'une valeur quelconque de y. x pouvant être regardé comme une fonction des variables y, x', x'', etc., que nous désignerons par $f(y, x', x'', \ldots)$, l'intégrale (1) prendra la forme

$$\int \varphi[f(y, x', x'', \ldots)]\frac{df(y, x', x'', \ldots)}{dy}\varphi(x')\varphi(x'')\ldots dy\,dx'dx''\ldots,$$

où y doit varier depuis $y = o$ jusqu'à $y = \eta$, et les autres variables reçoivent toutes les valeurs pour lesquelles $f(y, x', x''\ldots)$ est réelle.

On aura donc

$$\psi(y) = \int \varphi[f(y, x', x''\ldots)]\frac{df(y, x', x'', \ldots)}{dy}\varphi(x')\varphi(x'')\ldots dx'dx''\ldots;$$

l'intégration, dans laquelle y doit être regardé comme une constante, s'étendant à toutes les valeurs des variables x', x'', etc., pour lesquelles $f(y, x', x'', \ldots)$ prend une valeur réelle.

13.

L'intégration précédente exigerait, il est vrai, la connaissance de la fonction φ, qui est inconnue dans la plupart des cas. Lors même que cette fonction serait connue, le calcul surpasserait, le plus souvent, les forces de l'analyse. Dès lors il sera impossible d'obtenir la probabilité de chacune des valeurs de y; mais il en sera autrement si l'on désire seulement la *valeur moyenne* de y, qui sera donnée

par l'intégrale

$$\int y\psi(y)\,dy,$$

étendue à toutes les valeurs possibles de y.

Si, par la nature de la fonction, ou à cause des limites imposées à x, x', x'', etc., y n'est pas susceptible de recevoir toutes les valeurs, on devra supposer que $\psi(y)$ s'annule pour toutes les valeurs que y ne peut atteindre, et l'on pourra alors étendre l'intégration de $-\infty$ à $+\infty$.

Mais l'intégrale

$$\int y\psi(y)\,dy,$$

prise entre des limites déterminées η et η', est égale à

$$\int y\varphi f(y,x',x'',\ldots)\,\frac{df(y,x',x'',\ldots)}{dy}\,\varphi(x')\,\varphi(x'')\ldots dy\,dx'\,dx''\ldots,$$

prise depuis $y=\eta$ jusqu'à $y=\eta'$ et étendue à toutes les valeurs des variables x', x'', etc., pour lesquelles f est réelle. Cette intégrale est égale, par conséquent, à l'intégrale

$$\int y\varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'')\ldots\,dx\,dx'\,dx''\ldots,$$

dans laquelle y sera exprimé en fonction de x, x', x'', etc., la sommation s'étendant à toutes les valeurs des variables qui laissent y compris entre η et η'. D'après cela, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\psi(y)\,dy$$

peut se mettre sous la forme

$$\int y\varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'')\ldots\,dx\,dx'\,dx''\ldots,$$

l'intégration s'étendant à toutes les valeurs réelles de x, x', x'', c'est-à-dire depuis $x=-\infty$ à $x=+\infty$, $x'=-\infty$ à $x'=+\infty$, etc.

14.

Si la fonction y se réduit à une somme de termes de la forme

$$A x^\alpha x'^\beta x''^\gamma \ldots,$$

la valeur de l'intégrale

$$\int y \psi(y)\, dy,$$

étendue à toutes les valeurs de y, c'est-à-dire la valeur moyenne de y, sera égale à une somme de termes de la forme

$$A \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha \varphi(x)\, dx . \int_{-\infty}^{\infty} x'^\beta \varphi(x')\, dx' . \int_{-\infty}^{\infty} x''^\gamma \varphi(x'')\, dx'' \ldots,$$

c'est-à-dire que la valeur moyenne de y est égale à une somme de termes déduits de ceux mêmes qui composent y, en y remplaçant x^α, x'^β, x''^γ, etc., par leurs valeurs moyennes. La démonstration de ce théorème important pourrait facilement se déduire d'autres considérations.

15.

Appliquons le théorème précédent au cas où l'on a

$$y = \frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots}{\sigma},$$

σ désignant le nombre des termes du numérateur.

On trouve tout de suite que la valeur moyenne de y est égale à m^2 (la lettre m ayant toujours la signification de l'art. 5). La véritable valeur de y peut être inférieure ou supérieure à sa moyenne, de même que la vraie valeur de x^2 peut, dans chaque cas, être inférieure ou supérieure à m^2; mais la probabilité pour que la valeur fortuite de y ne diffère pas sensiblement de m^2, s'approchera sans cesse de la certitude à mesure que σ deviendra plus grand. Pour le montrer plus clairement, comme il est impossible de chercher exactement cette probabilité, nous chercherons *l'erreur moyenne à*

craindre en faisant $y = m^2$. D'après ce qui a été dit (art. 6), cette erreur sera la racine carrée de la moyenne de la fonction

$$\left(\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots}{\sigma} - m^2\right)^2.$$

Pour la trouver, il suffit d'observer que la valeur moyenne d'un terme tel que $\frac{x^4}{\sigma^2}$ est égale à $\frac{n^4}{\sigma^2}$ (n ayant la même signification que dans l'art. 11), et que la valeur moyenne d'un terme tel que $\frac{2x^2x'^2}{\sigma^2}$ est égale à $\frac{2m^4}{\sigma^2}$; par conséquent, la valeur moyenne de cette fonction sera

$$\frac{n^4 - m^4}{\sigma}.$$

De là nous concluons que si le nombre des erreurs irrégulières est suffisamment grand, la valeur de m sera représentée, avec une grande certitude, par la formule

$$m \doteq \sqrt{\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots}{\sigma}},$$

et *l'erreur moyenne à craindre* dans la détermination du carré de m, sera égale à

$$\sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}.$$

Comme cette dernière formule contient la quantité n, si l'on veut seulement se faire une idée du degré de précision de cette détermination, il suffira d'adopter pour la fonction φ une hypothèse particulière.

Si nous prenons, par exemple, la troisième hypothèse des art. 9 et 11, cette erreur sera égale à $m^2\sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Si on le préfère, on pourra obtenir une valeur approchée de n^4 au moyen des erreurs elles-mêmes, à l'aide de la formule

$$\frac{x^4 + x'^4 + x''^4 + \ldots}{\sigma}.$$

On peut affirmer généralement qu'une précision deux fois plus grande dans cette détermination exigera un nombre d'erreurs quadruple, c'est-à-dire que le poids de la détermination est proportionnel au nombre σ.

On verrait de la même manière que si les erreurs des observations renferment une partie constante, on déduira de leur moyenne arithmétique une valeur de la partie constante, et cette valeur sera d'autant plus approchée que le nombre des erreurs sera plus grand. Dans cette détermination, l'erreur moyenne à craindre sera représentée par $\sqrt{\frac{m^2-k^2}{\sigma}}$, k désignant la partie constante, et m l'erreur moyenne des observations non corrigées de leur erreur constante. Elle sera représentée simplement par $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$, si m représente l'erreur moyenne des observations corrigées de la partie constante (*voyez* art. 8).

16.

Dans les art. 12 à 15 nous avons supposé que les erreurs x, x', x'', etc., appartenaient au même genre d'observations, de sorte que la probabilité de chacune de ces erreurs était représentée par la même fonction. Mais il est évident que les principes généraux exposés dans les articles 12 à 14, peuvent facilement s'appliquer au cas plus général où les probabilités des erreurs x, x', x'', etc., sont représentées par des fonctions différentes

$$\varphi(x),\quad \varphi'(x'),\quad \varphi''(x''),\ldots,$$

c'est-à-dire lorsque ces erreurs appartiennent à des observations qui n'ont pas le même degré de précision. Supposons que x désigne l'erreur d'une observation dont l'erreur moyenne à craindre soit m; x', x'', etc., celles d'autres observations dont les erreurs moyennes à craindre soient respectivement m', m'', etc. : alors la valeur moyenne de

la somme

$$x^2 + x'^2 + x''^2 + \dots$$

sera

$$m^2 + m'^2 + m''^2 + \dots .$$

Or, si l'on sait, par ailleurs, que les quantités m, m', m'', etc., sont respectivement proportionnelles aux nombres, $1, \mu'$, μ'', etc., la valeur moyenne de l'expression

$$\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \dots}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \dots}$$

sera égale à m^2. Mais si nous adoptons pour m^2 la valeur que prendra cette expression, en y substituant les erreurs x, x', x'', etc., telles que le hasard les offrira, l'erreur moyenne qui affecte cette détermination sera, d'après l'article précédent,

$$\frac{\sqrt{n^4 + n'^4 + n''^4 + \dots - m^4 - m'^4 - m''^4 - \dots}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \dots},$$

où n', n'', etc., ont la même signification, par rapport à la seconde et à la troisième observation, que n par rapport à la première; et si l'on peut supposer les nombres n, n', n'', etc., proportionnels à m, m', m'', etc., cette erreur moyenne à craindre sera égale à

$$\frac{\sqrt{(n^4 - m^4)(1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \dots)}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \dots};$$

mais cette manière de déterminer une valeur approchée de m n'est pas la plus avantageuse.

Considérons l'expression plus générale

$$y = \frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \dots}{1 + \alpha' \mu'^2 + \alpha'' \mu''^2 + \dots},$$

dont la valeur moyenne sera aussi m^2, quels que soient les coefficients α', α'', etc. L'erreur moyenne à craindre lorsqu'on substitue la valeur m^2 à une valeur de y, déterminée d'après les erreurs fortuites x, x', x'', etc., sera, d'après

les principes précédents, donnée par la formule

$$\frac{\sqrt{(n^4 - m^4) + \alpha'^2(n'^4 - m'^4) + \alpha''^2(n''^4 - m''^4) + \ldots}}{1 + \alpha'\mu'^2 + \alpha''\mu''^2 + \ldots}.$$

Pour que cette erreur soit la plus petite possible, il faudra poser

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4}\mu'^2,$$

$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4}\mu''^2,$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces valeurs ne pourront pas s'évaluer tant qu'on ne connaîtra pas les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{n'}{m'}$, etc. Dans l'ignorance où l'on est de leur valeur exacte (*), le plus sûr sera de les supposer égaux entre eux (*voyez* art. 11), et l'on aura alors

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'^2}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''^2}, \ldots,$$

c'est-à-dire que les coefficients α', α'', etc., doivent être supposés égaux aux poids relatifs des diverses observations, en prenant pour unité le poids de celle à laquelle correspond l'erreur x. Ceci posé, désignons, comme ci-dessus, par σ le nombre des erreurs proposées; la valeur moyenne de l'expression

$$\frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \ldots}{\sigma}$$

sera égale à m^2, et lorsque nous prendrons, pour la vraie valeur de m^2, la valeur de cette expression déterminée au moyen des erreurs fortuites x, x', x'', etc., l'erreur moyenne à craindre sera

$$\frac{\sqrt{n^4 + \alpha'^2 n'^4 + \alpha''^2 n''^4 + \ldots - \sigma m^4}}{\sigma},$$

(*) On ne conçoit la possibilité de déterminer exactement μ, μ', μ'', etc., que dans le seul cas où, par la nature de la fonction φ, les erreurs x, x', x'', etc., proportionnelles à μ, μ', μ'', etc., seraient également probables, c'est-à-dire le cas où

$$\varphi(x) = \mu'\varphi'(\mu' x) = \mu''\varphi''(\mu'' x) \ldots.$$

(*Note de* M. Gauss.)

et, enfin, s'il est permis de supposer les quantités n, n', n'', etc., proportionnelles à m, m', m'', etc., cette expression se réduira à

$$\sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}},$$

résultat identique à celui que nous avons trouvé dans le cas où les observations sont toutes de même espèce.

17.

Lorsqu'une observation dont la précision n'est pas absolue, fait connaître une certaine quantité liée analytiquement à une grandeur inconnue, le résultat de cette observation peut fournir pour l'inconnue une valeur erronée, mais dans la détermination de laquelle il n'y a rien d'arbitraire qui puisse donner lieu à un choix plus ou moins vraisemblable.

Mais si plusieurs fonctions de la même inconnue sont données par des observations imparfaites, chaque observation fournira une valeur de l'inconnue, et l'on pourra également obtenir des valeurs, par la combinaison de plusieurs observations. Il y a évidemment une infinité de manières d'y parvenir; le résultat sera soumis, dans tous les cas, à une erreur possible. Selon la combinaison adoptée, l'erreur moyenne à craindre pourra être plus ou moins grande.

La même chose aura lieu si plusieurs quantités observées dépendent à la fois de plusieurs inconnues. Selon que le nombre des observations sera égal au nombre des inconnues, ou plus petit ou plus grand que ce nombre, le problème sera déterminé, ou indéterminé, ou plus que déterminé (du moins en général), et, dans ce troisième cas, les observations pourront être combinées d'une infinité de manières pour fournir les valeurs des inconnues. Parmi ces combinaisons, il faudra choisir les plus avantageuses, c'est-à-dire celles qui fournissent des valeurs pour lesquelles l'erreur moyenne à craindre est la moindre possible. Ce

problème est certainement le plus important que présente l'application des mathématiques à la philosophie naturelle.

Nous avons montré, dans la *Théorie du Mouvement des Corps célestes*, comment on trouve les valeurs les plus probables des inconnues lorsque l'on connaît la loi de probabilité des erreurs des observations, et comme, dans presque tous les cas, cette loi par sa nature reste hypothétique, nous avons appliqué cette théorie à l'hypothèse très-plausible, que la probabilité de l'erreur x soit proportionnelle à $e^{-h^2x^2}$; de là cette méthode que j'ai suivie, surtout dans les calculs astronomiques, et que maintenant la plupart des calculateurs emploient sous le nom de *Méthode des moindres carrés*.

Dans la suite, Laplace, considérant la question sous un autre point de vue, montra que ce principe est préférable à tous les autres, quelle que soit la loi de probabilité des erreurs, pourvu que le nombre des observations soit très-grand. Mais lorsque ce nombre est restreint, la question est encore intacte; de sorte que, si l'on rejette notre loi hypothétique, la méthode des moindres carrés serait préférable aux autres, par la seule raison qu'elle conduit à des calculs plus simples.

Nous espérons donc être agréable aux géomètres en démontrant, dans ce Mémoire, que la méthode des moindres carrés fournit les combinaisons les plus avantageuses des observations, non-seulement approximativement, mais encore d'une manière absolue, et cela quelle que soit la loi de probabilité des erreurs et quel que soit le nombre des observations, pourvu que l'on adopte pour l'erreur moyenne, non pas la définition de Laplace, mais celle que nous avons donnée dans les art. 5 et 6.

Il est nécessaire d'avertir ici que, dans les recherches suivantes, il ne sera question que des erreurs fortuites diminuées de leur partie constante. C'est à l'observateur qu'il appartient d'éloigner soigneusement les causes d'erreurs constantes.

Nous réservons pour une autre occasion l'examen du cas où les observations sont affectées d'une erreur constante inconnue, et nous traiterons cette question dans un autre Mémoire.

18.

PROBLÈME.

Soit U *une fonction donnée des inconnues* V, V′, V″, etc.; *on demande l'erreur moyenne* M *à craindre dans la détermination de la valeur de* U, *lorsque, au lieu des véritables valeurs de* V, V′, V″, etc., *on prend les valeurs déduites d'observations indépendantes les unes des autres;* m, m′, m″, etc., *étant les erreurs moyennes qui correspondent à ces diverses observations.*

Solution. — Désignons par e, e', e'', etc., les erreurs des valeurs observées V, V′, V″, etc.; l'erreur qui en résultera, pour la valeur de la fonction U, pourra s'exprimer par la fonction linéaire

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \ldots = \mathrm{E},$$

où $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., représentent les dérivées $\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}}, \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}'}, \frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}''}$, etc., lorsqu'on y remplace V, V′, V″, etc., par leurs vraies valeurs.

Cette valeur de E est évidente si l'on suppose les observations assez exactes pour que les carrés et les produits des erreurs soient négligeables. Il résulte de là que la valeur moyenne de E est nulle, puisque l'on suppose que les erreurs des observations n'ont plus de partie constante. Or l'erreur moyenne M, à craindre dans la valeur de U, sera la racine carrée de la valeur moyenne de E^2, c'est-à-dire que M^2 sera la valeur moyenne de la somme

$$\lambda^2 e^2 + \lambda'^2 e'^2 + \lambda''^2 e''^2 + \ldots + 2\lambda\lambda' ee' + 2\lambda\lambda'' ee'' + 2\lambda'\lambda'' e'e'' + \ldots;$$

mais la valeur moyenne de $\lambda^2 e^2$ est $\lambda^2 m^2$, celle de $\lambda'^2 e'^2$ est $\lambda'^2 m'^2$, etc., enfin les valeurs moyennes des produits $2\lambda\lambda' ee'$ sont toutes nulles; donc on aura

$$\mathrm{M} = \sqrt{\lambda^2 m^2 + \lambda'^2 m'^2 + \lambda''^2 m''^2 + \ldots}.$$

Il est bon d'ajouter plusieurs remarques à cette solution.

I. Puisqu'on néglige les puissances des erreurs qui sont supérieures à la première, nous pourrons, dans notre formule, prendre pour λ, λ', λ'', etc., les valeurs des coefficients différentiels $\frac{dU}{dV}$, etc., déduites des valeurs observées V, V', V'', etc. Toutes les fois que U est une fonction linéaire, cette substitution est rigoureusement exacte.

II. Si, au lieu des erreurs moyennes, on préfère introduire les poids des observations, supposons que p, p', p'', etc., soient les poids respectifs, l'unité étant arbitraire, et P le poids de la valeur de U; on aura

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \dots}.$$

III. Soit T une autre fonction de V, V', V'', etc.; posons

$$\frac{dT}{dV} = x, \quad \frac{dT}{dV'} = x', \quad \frac{dT}{dV''} = x'', \dots .$$

L'erreur commise sur T, en adoptant pour V, V', V'', etc., les résultats fournis par l'observation, sera

$$xe + x'e' + x''e'' \dots = E',$$

et l'erreur moyenne à craindre dans cette détermination sera

$$\sqrt{x^2m^2 + x'^2m'^2 + x''^2m''^2 + \dots}.$$

Il est évident que les erreurs E et E' ne seront pas indépendantes l'une de l'autre, et que la valeur moyenne du produit EE' ne sera pas nulle comme la valeur moyenne de ee'; elle sera égale à

$$x\lambda m^2 + x'\lambda' m'^2 + x''\lambda'' m''^2 + \dots .$$

IV. Le problème comprend le cas où les valeurs des quantités V, V', V'', etc., ne sont pas données immédiatement par l'observation, mais sont déduites de combinaisons quelconques d'observations directes. Pour que cette extension soit légitime, il faut que les déterminations de ces quantités soient indépendantes, c'est-à-dire qu'elles soient fournies

par des observations différentes. Si cette condition d'indépendance n'était pas remplie, la formule qui donne la valeur de M ne serait plus exacte. Si, par exemple, une même observation était employée, à la fois, dans la détermination de V et dans celle de V', les erreurs e et e' ne seraient plus indépendantes, et la valeur moyenne du produit ee' ne serait plus nulle. Si l'on connaît, dans ce cas, la relation qui lie V et V' aux résultats des observations simples dont ils dérivent, on pourra calculer la valeur moyenne du produit ee', comme il est indiqué dans la remarque III, et dès lors corriger la formule qui donnera M.

19.

Soient V, V', V'', etc., des fonctions des inconnues x, y, z, etc.; soient ϖ le nombre de ces fonctions, ρ le nombre des inconnues; supposons que des observations aient donné, immédiatement ou médiatement, L, L', L'', etc., pour valeurs des fonctions V, V', V'', etc., de manière cependant que ces déterminations soient absolument indépendantes les unes des autres. Si ρ est plus grand que ϖ, la recherche des inconnues est un problème indéterminé. Si $\rho = \varpi$, chacune des inconnues x, y, z, etc., peut être regardée comme calculée en fonction de V, V', V'', etc.; de sorte que les valeurs des premières peuvent être déduites des valeurs observées de ces dernières, et l'article précédent nous permettra de calculer la précision relative de ces diverses déterminations. Si ρ est plus petit que ϖ, chaque inconnue x, y, z, etc., pourra être exprimée d'une infinité de manières, en fonction de V, V', V'', etc., et, en général, ces valeurs seront différentes; elles devraient coïncider si les observations étaient, contrairement à nos hypothèses, d'une exactitude rigoureuse. Il est clair, d'ailleurs, que les diverses combinaisons fournissent des résultats dont la précision sera, en général, différente.

D'ailleurs si, dans le deuxième et le troisième cas, les quantités V, V', V'', etc., sont telles que $\varpi - \rho + 1$ d'entre

elles, ou davantage, puissent être regardées comme des fonctions des autres, le problème est plus que déterminé relativement à ces dernières fonctions et indéterminé relativement aux inconnues x, y, z, etc.; et l'on ne pourrait même pas déterminer ces dernières inconnues, quand bien même les fonctions V, V', V'', etc., seraient exactement connues: mais nous excluons ce cas de nos recherches.

Si V, V', V'', etc., ne sont pas des fonctions linéaires des inconnues, on pourra toujours leur attribuer cette forme, en remplaçant les inconnues primitives par leur différence avec leurs valeurs approchées, que l'on suppose connues; les erreurs moyennes à craindre dans les déterminations

$$V = L, \quad V' = L', \quad V'' = L'', \ldots$$

étant désignées respectivement par m, m', m'', etc., et les poids de ces déterminations, par p, p', p'', etc , de telle sorte que

$$pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2 = \ldots.$$

Nous supposerons connus les rapports des erreurs moyennes ainsi que les poids, dont l'un sera pris arbitrairement. Si nous posons enfin

$$(V - L)\sqrt{p} = v, \quad (V' - L')\sqrt{p'} = v', \ldots,$$

les choses se passeront ensuite comme si des observations immédiates, également précises et dont l'erreur moyenne aurait pour valeur $m\sqrt{p}$, avaient donné

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0, \ldots$$

20.

PROBLÈME.

Désignons par v, v', v'', etc., *les fonctions linéaires suivantes des indéterminées* x, y, z, etc.,

$$(1) \quad \begin{cases} v = ax + by + cz + \ldots + l, \\ v' = a'x + b'y + c'z + \ldots + l', \\ v'' = a''x + b''y + c''z + \ldots + l'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Parmi tous les systèmes des coefficients $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, etc., *qui donnent identiquement*

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \ldots = x - k,$$

k *étant indépendant de* x, y, z, etc., *trouver celui pour lequel* $\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \ldots$ *est minimum.*

Solution. — Posons

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} av + a'v' + a''v'' + \ldots = \xi, \\ bv + b'v' + b''v'' + \ldots = \eta, \\ cv + c'v' + c''v'' + \ldots = \zeta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

ξ, η, ζ seront des fonctions linéaires de x, y, z, et l'on aura

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = x\sum a^2 + y\sum ab + z\sum ac + \ldots + \sum al, \\ \eta = x\sum ab + y\sum b^2 + z\sum bc + \ldots + \sum bl, \\ \zeta = x\sum ac + y\sum bc + z\sum c^2 + \ldots + \sum cl, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

où

$$\sum a^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots,$$

et de même pour les autres Σ.

Le nombre des quantités ξ, η, ζ, etc., est égal au nombre ϖ des inconnues x, y, z, etc.; on pourra donc obtenir, par élimination, une équation de la forme suivante (*),

$$x = \mathrm{A} + (\alpha\alpha)\,\xi + (\alpha\beta)\,\eta + (\alpha\gamma)\,\zeta + \ldots,$$

qui sera satisfaite identiquement lorsqu'on remplacera ξ, η, ζ, par leurs valeurs (3). Par conséquent, si l'on

---

(*) On verra plus loin la raison qui nous a conduit à désigner les coefficients de cette formule par la notation $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, etc.

(*Note de* M. Gauss.)

pose

$$(4)\qquad \begin{cases} a\ (\alpha\alpha) + b\ (\alpha\beta) + c\ (\alpha\gamma) + \ldots = \alpha, \\ a'\ (\alpha\alpha) + b'\ (\alpha\beta) + c'\ (\alpha\gamma) + \ldots = \alpha', \\ a''\ (\alpha\alpha) + b''(\alpha\beta) + c''\ (\alpha\gamma) + \ldots = \alpha'', \end{cases}$$

on aura identiquement

$$(5)\qquad \alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \ldots = x - \mathrm{A}.$$

Cette équation montre que parmi les différents systèmes de coefficients x, x', x'', etc., on doit compter le système

$$x = \alpha,\quad x' = \alpha',\quad x'' = \alpha'', \ldots.$$

On aura d'ailleurs, pour un système quelconque,

$$(x - \alpha)\, v + (x' - \alpha')\, v' + (x'' - \alpha'')\, v'' + \ldots = \mathrm{A} - k,$$

et cette équation, étant identique, entraîne les suivantes :

$$\begin{aligned} (x - \alpha)\, a + (x' - \alpha')\, a' + (x'' - \alpha'')\, a'' + \ldots &= 0, \\ (x - \alpha)\, b + (x' - \alpha')\, b' + (x'' - \alpha'')\, b'' + \ldots &= 0, \\ (x - \alpha)\, c + (x' - \alpha')\, c' + (x'' - \alpha'')\, c'' + \ldots &= 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}$$

Ajoutons ces équations après les avoir multipliées, respectivement, par $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, etc., nous aurons, en vertu du système (4),

$$(x - \alpha)\, \alpha + (x' - \alpha')\, \alpha' + (x'' - \alpha'')\, \alpha'' + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + x'^2 + \ldots = \alpha^2 + \alpha'^2 + \ldots + (x - \alpha)^2 + (x' - \alpha')^2 + \ldots;$$

par conséquent, la somme

$$x^2 + x'^2 + x''^2 + \ldots$$

aura une valeur minimum, lorsque l'on aura

$$x = \alpha,\quad x' = \alpha',\quad x'' = \alpha'', \ldots.$$

D'ailleurs cette valeur minimum s'obtiendra de la manière suivante.

L'équation (5) montre que l'on a

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots = 1,$$
$$b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' + \ldots = 0,$$
$$c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha'' + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions ces équations, respectivement, par $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, etc., et ajoutons; en ayant égard aux relations (4), on trouvera

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots = (\alpha\alpha).$$

21.

Lorsque les observations auront donné des équations approximatives

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0, \ldots,$$

il faudra, pour déterminer l'inconnue x, choisir une combinaison de la forme suivante,

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \ldots = 0,$$

telle que l'inconnue x acquière un coefficient égal à 1, et que les autres inconnues se trouvent éliminées.

Le poids de cette détermination sera, d'après l'art. 18,

$$\frac{1}{\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \ldots}.$$

D'après l'article précédent, on obtiendra la détermination la plus convenable, en prenant

$$\varkappa = \alpha, \quad \varkappa' = \alpha', \quad \varkappa'' = \alpha'', \ldots;$$

alors x aura la valeur A. On obtiendrait évidemment la même valeur sans connaître les multiplicateurs α, α', α'', etc., en effectuant l'élimination sur les équations

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \ldots;$$

le poids de cette détermination sera

$$\frac{1}{(\alpha\alpha)},$$

et l'erreur moyenne à craindre

$$m\sqrt{p}\,(\alpha\alpha) = m'\sqrt{p'}\,(\alpha\alpha) = m''\sqrt{p''}\,(\alpha\alpha) = \ldots.$$

Une marche analogue conduirait aux valeurs les plus convenables des autres inconnues y, z, etc., qui seront celles que l'on obtiendrait en effectuant l'élimination sur les équations

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \ldots.$$

Si nous désignons par Ω la somme

$$v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$p(V - L)^2 + p'(V' - L')^2 + p''(V'' - L'')^2 + \ldots,$$

on aura évidemment

$$2\xi = \frac{d\Omega}{dx}, \quad 2\eta = \frac{d\Omega}{dy}, \quad 2\zeta = \frac{d\Omega}{dz}, \ldots;$$

par conséquent, les valeurs des inconnues, déduites de la combinaison la plus convenable, et que nous pouvons appeler les valeurs *les plus plausibles*, sont précisément celles qui donnent à Ω une valeur minimum. Or $V - L$ représente la différence entre la valeur observée et la valeur calculée; donc les valeurs les plus plausibles des inconnues sont celles qui rendent minimum la somme des carrés des différences entre les valeurs calculées et observées des quantités V, V', V'', etc., ces carrés étant respectivement multipliés par le poids des observations. J'avais établi depuis longtemps ce principe par d'autres considérations (*Theoria Motus Corporum cœlestium*).

Si l'on veut assigner la précision relative de chacune des déterminations, il faut déduire des équations (3), les valeurs

de x, y, z, etc., qui se présenteront sous la forme suivante :

$$(7)\quad \begin{cases} x = A + (\alpha\alpha)\xi + (\alpha\beta)\eta + (\alpha\gamma)\zeta + \ldots, \\ y = B + (\beta\alpha)\xi + (\beta\beta)\eta + (\beta\gamma)\zeta + \ldots, \\ z = C + (\gamma\alpha)\xi + (\gamma\beta)\eta + (\gamma\gamma)\zeta + \ldots \end{cases}$$

Les valeurs les plus plausibles des inconnues x, y, z, etc., seront A, B, C, etc. Les poids de ces déterminations seront

$$\frac{1}{(\alpha\alpha)},\quad \frac{1}{(\beta\beta)},\quad \frac{1}{(\gamma\gamma)},\ldots,$$

et les erreurs moyennes à craindre

pour x, $m\sqrt{p}\,(\alpha\alpha) = m'\sqrt{p'}\,(\alpha\alpha),\ldots,$

pour y, $m\sqrt{p}\,(\beta\beta) = m'\sqrt{p'}\,(\beta\beta),\ldots,$

pour z, $m\sqrt{p}\,(\gamma\gamma) = m'\sqrt{p'}\,(\gamma\gamma),\ldots,$

ce qui s'accorde avec les résultats obtenus antérieurement (*Theoria Motus Corporum cœlestium*).

22.

Le cas où il n'y a qu'une seule inconnue est le plus fréquent et le plus simple de tous. On a alors

$$V = x,\quad V' = x,\quad V'' = x,\ldots;$$

il sera utile d'en dire quelques mots.

On aura

$$a = \sqrt{p},\qquad a' = \sqrt{p'},\qquad a'' = \sqrt{p''},\ldots,$$
$$l = -L\sqrt{p},\quad l' = -L'\sqrt{p'},\quad l'' = -L''\sqrt{p''},\ldots,$$

et, par conséquent,

$$\xi = (p + p' + p'' + \ldots)x - (pL + p'L' + p''L'' + \ldots);$$

d'où

$$(\alpha\alpha) = \frac{1}{p + p' + p''\ldots},$$
$$A = \frac{pL + p'L' + p''L'' + \ldots}{p + p' + p'' + \ldots}.$$

Ainsi, si, par plusieurs observations qui n'ont pas la même précision et dont les poids respectifs sont p, p', p'', etc., on a trouvé, pour une même quantité, une première valeur L, une deuxième L', une troisième L'', etc., la valeur la plus plausible sera

$$\frac{pL + p'L' + p''L'' + \ldots}{p + p' + p'' + \ldots},$$

et le poids de cette détermination sera

$$p + p' + p'' + \ldots.$$

Si toutes les observations sont également plausibles, la valeur la plus probable sera

$$\frac{L + L' + L'' + \ldots}{\varpi},$$

c'est-à-dire la moyenne arithmétique entre les valeurs observées; en prenant pour unité le poids d'une observation isolée, le poids de la moyenne sera ϖ.

SECONDE PARTIE,

PRÉSENTÉE LE 2 FÉVRIER 1823, A LA SOCIÉTÉ ROYALE DE GOTTINGUE.

23.

Il reste encore à exposer quelques recherches destinées à étendre et à éclairer la théorie précédente.

Cherchons d'abord si l'élimination qui fournit les variables x, y, z, etc., en fonction de ξ, η, ζ, etc., est toujours possible. Puisque le nombre des équations est égal à celui des inconnues, on sait que cette élimination sera possible si ξ, η, ζ, etc. sont indépendants les uns des autres; dans le cas contraire, elle serait impossible.

Supposons, pour un instant, que ξ, η, ζ, etc., ne soient pas indépendantes, mais qu'il existe entre ces quantités l'équation identique

$$o = F\xi + G\eta + H\zeta + \ldots + K;$$

nous en conclurons

$$F\sum a^2 + G\sum ab + H\sum ac + \ldots = o,$$
$$F\sum ab + G\sum b^2 + H\sum bc + \ldots = o,$$
$$F\sum ac + G\sum bc + H\sum c^2 + \ldots = o,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F\sum al + G\sum bl + H\sum cl + \ldots = -K.$$

Posons

$$(1)\qquad \begin{cases} a\,F + b\,G + c\,H + \ldots = \theta, \\ a'\,F + b'\,G + c'\,H + \ldots = \theta', \\ a''F + b''G + c''H + \ldots = \theta'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

il viendra

$$a\theta + a'\theta' + a''\theta'' + \ldots = o,$$
$$b\theta + b'\theta' + b''\theta'' + \ldots = o,$$
$$c\theta + c'\theta' + c''\theta'' + \ldots = o,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l\theta + l'\theta' + l''\theta'' + \ldots = -K.$$

En multipliant les équations (1), respectivement par θ, θ', θ'', etc., et ajoutant, il vient

$$\theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2 + \ldots = o,$$

et cette équation entraîne les suivantes :

$$\theta = o, \quad \theta' = o, \quad \theta'' = o, \ldots.$$

De là nous concluons, en premier lieu, $K = o$. En second lieu, les équations (1) montrent que les fonctions v, v', v'', etc., sont telles, que leurs valeurs ne changent pas lors-

que les variables x, y, z, etc., prennent des accroissements proportionnels à F, G, H, etc. Il en sera évidemment de même des fonctions V, V′, V″, etc. : or cela ne peut avoir lieu que dans le cas où il serait impossible de déterminer x, y, z, etc., à l'aide des valeurs de V, V′, V″, etc., lors même que celles-ci seraient exactement connues; mais alors le problème serait indéterminé par sa nature, et nous exclurons ce cas de nos recherches.

24.

Désignons par β, β', β'', etc., des multiplicateurs qui jouent le même rôle relativement à l'inconnue y, que les multiplicateurs $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc., relativement à l'inconnue x, c'est-à-dire tels, que l'on ait

$$\begin{aligned}
a\,(\beta\alpha) + b\,(\beta\beta) + c\,(\beta\gamma) + \ldots &= \beta, \\
a'\,(\beta\alpha) + b'\,(\beta\beta) + c'\,(\beta\gamma) + \ldots &= \beta', \\
a''(\beta\alpha) + b''(\beta\beta) + c''(\beta\gamma) + \ldots &= \beta'', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

on aura identiquement

$$\beta v + \beta' v' + \beta'' v'' \ldots = y - \mathrm{B}.$$

Soient $\gamma, \gamma', \gamma''$, etc., les multiplicateurs analogues relatifs à la variable z tels, que l'on ait

$$\begin{aligned}
a\,(\gamma\alpha) + b\,(\gamma\beta) + c\,(\gamma\gamma) + \ldots &= \gamma, \\
a'\,(\gamma\alpha) + b'(\gamma\beta) + c'(\gamma\gamma) + \ldots &= \gamma'. \\
a''(\gamma\alpha) + b''(\gamma\beta) + c''(\gamma\gamma) + \ldots &= \gamma'', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\gamma v + \gamma' v' + \gamma'' v'' + \ldots = z - \mathrm{C}.$$

De la même manière que l'on a trouvé (art. 20)

$$\sum \alpha a = 1, \quad \sum \alpha b = 0, \quad \sum \alpha c = 0, \ldots, \quad \sum \alpha l = -\mathrm{A},$$

nous trouverons ici

$$\sum \beta a = 0,\quad \sum \beta b = 1,\quad \sum \beta c = 0,\ \ldots,\quad \sum \beta l = -B,$$
$$\sum \gamma a = 0,\quad \sum \gamma b = 0,\quad \sum \gamma c = 1,\ldots,\quad \sum \gamma l = -C;$$

et ainsi de suite.

On aura aussi, comme dans l'art. 20,

$$\sum \alpha^2 = (\alpha\alpha),\quad \sum \beta^2 = (\beta\beta),\quad \sum \gamma^2 = (\gamma\gamma),\ldots.$$

Multiplions les valeurs α, α', α'', etc. (art. 20), respectivement, par β, β', β'', etc., et ajoutons; nous aurons

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots = (\alpha\beta),$$

c'est-à-dire

$$\sum \alpha\beta = (\alpha\beta).$$

En multipliant β, β', β'', etc., respectivement, par α, α', α'', etc., et ajoutant, on trouvera

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots = (\beta\alpha);$$

donc

$$(\alpha\beta) = (\beta\alpha).$$

On trouverait, de la même manière,

$$(\alpha\gamma) = (\gamma\alpha) = \sum \alpha\gamma,\quad (\beta\gamma) = (\gamma\beta) = \sum \beta\gamma,\ldots.$$

25.

Désignons par λ, λ', λ'', etc., les valeurs que prennent les fonctions v, v', v'', etc., quand on y remplace x, y, z, etc., par leurs valeurs les plus plausibles, A, B, C, etc., c'est-à-dire posons

$$\begin{aligned} a\,A + b\,B + c\,C + \ldots + l &= \lambda, \\ a'A + b'B + c'C + \ldots + l' &= \lambda', \\ a''A + b''B + c''C + \ldots + l'' &= \lambda'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si nous faisons

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \ldots = M,$$

de telle sorte que M soit la valeur de la fonction Ω, qui répond aux valeurs les plus plausibles des variables; M sera (art. 20) la valeur minimum de Ω.

Par suite,

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \ldots$$

sera la valeur que prend ξ, lorsque

$$x = \text{A}, \quad y = \text{B}, \quad z = \text{C}, \ldots.$$

Cette valeur est nulle, d'après la manière même dont A, B, C, etc., ont été obtenus. On aura donc

$$\sum a\lambda = 0;$$

on obtiendrait de même

$$\sum b\lambda = 0, \quad \sum c\lambda = 0, \ldots,$$

et

$$\sum \alpha\lambda = 0, \quad \sum \beta\lambda = 0, \quad \sum \gamma\lambda = 0, \ldots.$$

Enfin, en multipliant les valeurs de λ, λ', λ'', etc., respectivement, par λ, λ', λ'', et ajoutant, il viendra

$$l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'' + \ldots = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\sum l\lambda = \text{M}.$$

26.

Remplaçons, dans l'équation

$$v = ax + by + cz + \ldots + l,$$

x, y, z, par les expressions (7) [art. 21], on trouvera, en employant des réductions faciles,

$$\begin{aligned} v &= \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \ldots + \lambda, \\ v' &= \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta + \ldots + \lambda', \\ v'' &= \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta + \ldots + \lambda'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Multipliant respectivement, ou ces équations ou les équations (1) de l'art. 20, par $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., et ajoutant ensuite, on obtient l'identité

$$\lambda v + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \ldots = M.$$

27.

La fonction Ω peut se présenter sous plusieurs formes qu'il est important d'indiquer.

Élevons au carré les équations (1) [art. 20], et ajoutons-les membre à membre, nous trouverons

$$\Omega = x^2 \sum a^2 + y^2 \sum b^2 + z^2 \sum c^2 + \ldots + 2xy \sum ab$$
$$+ 2xz \sum ac + 2yz \sum bc + \ldots + 2x \sum al + 2y \sum bl$$
$$+ 2z \sum cl + \ldots + \sum l^2:$$

c'est la *première forme.*

Multiplions les mêmes équations, respectivement, par v, v', v'', etc., et ajoutons, on aura

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \ldots + lv + l'v' + l''v'' + \ldots;$$

remplaçons v, v', v'', etc., par les valeurs indiquées dans l'article précédent, nous trouverons

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \ldots - A\xi - B\eta - C\zeta - \ldots + M,$$

ou

$$\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \ldots + M:$$

c'est la *seconde forme.*

Enfin, remplaçons, dans cette seconde forme, $x - A$, $y - B$, $z - C$, etc., par les expressions (7) [art. 21], nous obtenons la *troisième forme :*

$$\Omega = (\alpha\alpha)\xi^2 + (\beta\beta)\eta^2 + (\gamma\gamma)\zeta^2 + \ldots + 2(\alpha\beta)\xi\eta$$
$$+ 2(\alpha\gamma)\xi\zeta + 2(\beta\gamma)\eta\zeta + \ldots + M.$$

On peut donner une *quatrième forme* qui résulte évidemment de la troisième et des formules des articles préc-

dents,

$$\Omega = (v - \lambda)^2 + (v' - \lambda')^2 + (v'' - \lambda'')^2 + \ldots + M,$$

c'est-à-dire

$$\Omega = M + \sum (v - \lambda)^2.$$

Sous cette dernière forme on voit clairement que M est la valeur minimum de Ω.

28.

Soient e, e', e'', etc., les erreurs commises dans les observations qui ont donné

$$V = L, \quad V' = L', \quad V'' = L'', \ldots.$$

Les vraies valeurs des fonctions V, V', V'', etc., seront alors

$$L - e, \quad L' - e', \quad L'' - e'', \ldots,$$

et les vraies valeurs de v, v', v'', etc., seront respectivement

$$-e\sqrt{p}, \quad -e'\sqrt{p'}, \quad -e''\sqrt{p''}, \ldots;$$

par conséquent, la véritable valeur de x sera

$$A - \alpha e\sqrt{p} - \alpha' e'\sqrt{p'} - \alpha'' e''\sqrt{p''} - \ldots,$$

et l'erreur commise dans la détermination la plus convenable de l'inconnue x sera, en la désignant par Ex,

$$Ex = \alpha e\sqrt{p} + \alpha' e'\sqrt{p'} + \alpha'' e''\sqrt{p''} + \ldots.$$

De même, l'erreur commise dans la détermination la plus convenable de la valeur de y sera

$$Ey = \beta e\sqrt{p} + \beta' e'\sqrt{p'} + \beta'' e''\sqrt{p''} + \ldots.$$

La valeur moyenne du carré $(Ex)^2$ sera

$$m^2 p\,(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots) = m^2 p\,(\alpha\alpha).$$

La valeur moyenne de $(Ey)^2$ sera de même

$$m^2 p\,(\beta\beta),$$

comme nous l'avons déjà reconnu. On peut également assigner la valeur moyenne du produit $Ex.Ey$, qui sera

$$m^2p(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots) = m^2p(\alpha\beta).$$

On énonce ces résultats plus brièvement de la manière suivante :

Les valeurs moyennes des carrés $(Ex)^2$, $(Ey)^2$, etc., sont respectivement égales aux produits de $\frac{m^2p}{2}$ par les quotients différentiels partiels du second ordre

$$\frac{d^2\Omega}{d\xi^2},\ \frac{d^2\Omega}{d\eta^2},\ldots,$$

et la valeur moyenne d'un produit tel que $Ex.Ey$ est le produit de $\frac{1}{2}m^2p$ par $\frac{d^2\Omega}{d\xi\, d\eta}$, en regardant Ω comme fonction de ξ, η, ζ, etc.

29.

Soit t une fonction donnée et linéaire des quantités x, y, z, etc., par exemple,

$$t = fx + gy + hz + \ldots + k;$$

la valeur de t déduite des valeurs les plus plausibles de x, y, z, etc., sera

$$fA + gB + hC + \ldots + k:$$

nous la désignerons par K. En désignant par Et l'erreur commise en l'adoptant, on aura

$$Et = f\,Ex + g\,Ey + h\,Ez + \ldots;$$

la valeur moyenne de cette erreur sera évidemment nulle, c'est-à-dire que l'erreur ne contiendra pas de partie constante, mais la valeur moyenne de $(Et)^2$, c'est-à-dire de la somme

$$\begin{aligned} f^2(Ex)^2 &+ 2fg\,Ex.Ey + 2fh\,Ex.Ez + \ldots \\ &+ g^2(Ey)^2 + 2gh\,Ey.Ez + \ldots \\ &+ h^2(Ez)^2 + \ldots, \end{aligned}$$

sera, d'après l'article précédent, égale au produit de m^2p par la somme

$$\begin{aligned} f^2(\alpha\alpha) &+ 2fg(\alpha\beta) + 2fh(\alpha\gamma) + \ldots \\ &+ g^2(\beta\beta) + 2gh(\beta\gamma) + \ldots \\ &\qquad + h^2(\gamma\gamma) + \ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire au produit de m^2p par la valeur de la fonction $\Omega - \mathrm{M}$, lorsqu'on y fait

$$\xi = f, \quad \eta = g, \quad \zeta = h, \ldots .$$

Désignons par ω cette valeur de $\Omega - \mathrm{M}$; l'erreur moyenne à craindre, lorsque l'on prend $t = \mathrm{K}$, sera $m\sqrt{p\omega}$, et le poids de cette détermination sera $\frac{1}{\omega}$.

Puisque l'on a identiquement

$$\Omega - \mathrm{M} = (x - \mathrm{A})\xi + (y - \mathrm{B})\eta + (z - \mathrm{C})\zeta + \ldots,$$

ω sera égal à la valeur de l'expression

$$(x - \mathrm{A})f + (y - \mathrm{B})g + (z - \mathrm{C})h + \ldots$$

[qui représente $(t - \mathrm{K})$], dans laquelle on remplacera x, y, z, etc., par les valeurs correspondantes à $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$, etc.

Enfin, observant que t, exprimé en fonction des quantités ξ, η, ζ, etc., aura K pour partie constante, si l'on suppose

$$t = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \ldots + \mathrm{K},$$

on aura

$$\omega = f\mathrm{F} + g\mathrm{G} + h\mathrm{H} + \ldots .$$

30.

Nous avons vu que la fonction Ω acquiert son minimum absolu M, lorsque l'on y fait

$$x = \mathrm{A}, \quad y = \mathrm{B}, \quad z = \mathrm{C}, \ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \ldots .$$

Si l'on attribue à l'une des inconnues une autre valeur ; que l'on fasse, par exemple,

$$x = A + \Delta,$$

les autres inconnues restant variables, Ω pourra acquérir une valeur minimum relative, qui s'obtiendra à l'aide des équations

$$x = A + \Delta, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0, \ldots,$$

et, par suite,

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0, \ldots ;$$

or, puisque

$$x = A + (\alpha\alpha)\xi + (\alpha\beta)\eta + (\alpha\gamma)\zeta + \ldots,$$

on en conclut

$$\xi = \frac{\Delta}{(\alpha\alpha)}.$$

On trouvera de même

$$y = B + \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha\alpha)}\Delta, \quad z = C + \frac{(\alpha\gamma)}{(\alpha\alpha)}\Delta, \ldots.$$

La valeur minimum relative de Ω sera

$$(\alpha\alpha)\xi^2 + M = M + \frac{\Delta^2}{(\alpha\alpha)}.$$

Nous en conclurons, réciproquement, que si Ω ne doit pas surpasser $M + \mu^2$, la valeur de x est nécessairement comprise entre les limites $A - \mu\sqrt{(\alpha\alpha)}$, et $A + \mu\sqrt{(\alpha\alpha)}$. Il est important de remarquer que $\mu\sqrt{(\alpha\alpha)}$ devient égal à l'erreur moyenne à craindre dans la valeur la plus plausible de x, si l'on pose

$$\mu = m\sqrt{p};$$

c'est-à-dire si μ est l'erreur moyenne d'observations telles, que leur poids soit l'unité.

Plus généralement, cherchons la plus petite valeur de la

fonction Ω qui puisse correspondre à une valeur donnée de t, t désignant, comme dans l'article précédent, l'expression linéaire

$$fx + gy + hz + \ldots + k,$$

dont la valeur la plus plausible est K ; désignons par $K + \varkappa$ la valeur donnée de t. D'après la théorie des maximum et minimum, la solution du problème sera donnée par les équations

$$\frac{d\Omega}{dx} = \theta \frac{dt}{dx},$$
$$\frac{d\Omega}{dy} = \theta \frac{dt}{dy},$$
$$\frac{d\Omega}{dz} = \theta \frac{dt}{dz},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou

$$\xi = \theta f,$$
$$\eta = \theta g,$$
$$\zeta = \theta h,$$
$$\ldots\ldots$$

θ désignant un multiplicateur encore indéterminé.

Si, comme dans l'article précédent, nous posons identiquement,

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \ldots + K,$$

nous aurons

$$K + \varkappa = \theta(fF + gG + hH + \ldots) + K;$$

d'où.

$$\theta = \frac{\varkappa}{\omega},$$

ω ayant la même signification que dans l'article précédent.

Puisque $\Omega - M$ est une fonction homogène du second degré, par rapport aux variables ξ, η, ζ, etc., sa valeur pour

$$\xi = \theta f, \quad \eta = \theta g, \quad \zeta = \theta h \ldots,$$

sera évidemment

$$\theta^2 \omega,$$

et, par conséquent, la valeur minimum de Ω, lorsque

$$t = K + \varkappa,$$

sera

$$M + \theta^2\omega = M + \frac{\varkappa^2}{\omega}.$$

Réciproquement, si Ω doit rester inférieure à une valeur donnée $M + \mu^2$, la valeur de t sera nécessairement comprise entre les limites $K - \mu\sqrt{\omega}$, $K + \mu\sqrt{\omega}$, et $\mu\sqrt{\omega}$ sera l'erreur moyenne à craindre dans la valeur la plus plausible de t, si μ représente l'erreur moyenne d'observations dont le poids serait l'unité.

31.

Lorsque le nombre des inconnues x, y, z, etc., est un peu grand, la détermination des valeurs numériques de A, B, C, etc., par l'élimination ordinaire, est assez pénible. C'est pourquoi nous avons indiqué, dans la *Théorie du Mouvement des Corps célestes*, et développé plus tard, dans le *Mémoire sur les éléments de l'orbite de Pallas* (*Commentaires de Gottingue*, t. I), une méthode qui simplifie ce travail autant que possible.

La fonction Ω doit être ramenée à la forme suivante :

$$\frac{u^{0\,2}}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{u'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \ldots + M,$$

où les diviseurs $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}'''$, etc., sont des quantités déterminées; u^0, u', u'', etc., sont des fonctions linéaires de x, y, z, etc., telles que la seconde u' ne contient pas x, la troisième u'' ne contient ni x ni y, la quatrième ne contient ni x, ni y, ni z, et ainsi de suite, de sorte que la dernière $u^{(\varpi - 1)}$ ne contient que la dernière des inconnues x, y, z, etc.; enfin les coefficients de x, y, z, etc., dans u^0, u', u'', etc., sont respectivement égaux à $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, etc. Alors on pose

$$u^0 = 0, \quad u' = 0, \quad u'' = 0, \quad u''' = 0, \ldots,$$

et l'on aura très-facilement les valeurs de x, y, z, etc.,

en résolvant ces équations et commençant par la dernière. Je ne crois pas nécessaire de répéter de nouveau l'algorithme qui conduit à cette transformation de la fonction Ω (*).

Mais l'élimination qu'il faut effectuer pour trouver les poids de ces déterminations exige des calculs bien plus longs encore. Nous avons montré, dans la *Théorie du Mouvement des Corps célestes,* que le poids de la détermination de la dernière inconnue, qui entre seule dans $u^{(\varpi-1)}$, est égal au dernier terme de la série des diviseurs $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, etc. Cette recherche est facile; aussi plusieurs calculateurs, voulant éviter une élimination pénible, ont eu l'idée, faute d'autre méthode, de répéter la transformation indiquée en considérant successivement chaque inconnue comme la dernière. J'espère donc que les géomètres me sauront gré d'indiquer, pour calculer les poids des déterminations, une méthode nouvelle qui ne me semble plus rien laisser à désirer sur ce point.

32.

Posons

$$(1)\quad \begin{cases} u^0 = \mathfrak{A}^0 x + \mathfrak{B}^0 y + \mathfrak{C}^0 z + \ldots + \mathfrak{L}^0, \\ u' = \qquad\quad \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \ldots + \mathfrak{L}', \\ u'' = \qquad\qquad\qquad \mathfrak{C}'' z + \ldots + \mathfrak{L}'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

on aura identiquement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, d\Omega &= \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \ldots \\ &= u^0 \frac{du^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u' du'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u'' du''}{\mathfrak{C}''} + \ldots \\ &= u^0 \left(dx + \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} dy + \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} dz + \ldots\right) \\ &\quad + u' \left(dy + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} dz + \ldots\right) \\ &\quad + u'' (dz + \ldots) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

(*) On trouvera ces calculs dans une Note à la fin du volume. J. B.

d'où nous déduirons :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi = u^0, \\ \eta = \dfrac{\mathcal{B}^0}{\mathcal{A}^0}\,u^0 + u', \\ \zeta = \dfrac{\mathcal{C}^0}{\mathcal{A}^0}\,u^0 + \dfrac{\mathcal{C}'}{\mathcal{B}'}\,u' + u'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les valeurs de u^0, u', u'', etc., déduites de ces équations, se présenteront sous la forme suivante :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u^0 = \xi, \\ u' = A'\xi + \eta, \\ u'' = A''\xi + B''\eta + \zeta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

De la différentielle complète de l'équation

$$\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \ldots + M,$$

retranchons l'équation

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz + \ldots,$$

il viendra

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = (x - A)\,d\xi + (y - B)\,d\eta + (z - C)\,d\zeta + \ldots.$$

Cette expression doit être identique avec celle que l'on obtient à l'aide des équations (3), c'est-à-dire

$$\frac{u^0}{\mathcal{A}^0}\,d\xi + \frac{u'}{\mathcal{B}'}(A'd\xi + d\eta) + \frac{u''}{\mathcal{C}''}(A''d\xi + B''d\eta + d\zeta) + \ldots;$$

on aura donc

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{u^0}{\mathcal{A}^0} + A'\dfrac{u'}{\mathcal{B}'} + A''\dfrac{u''}{\mathcal{C}''} + \ldots + A, \\ y = \qquad\qquad \dfrac{u'}{\mathcal{B}'} + B''\dfrac{u''}{\mathcal{C}''} + \ldots + B, \\ z = \qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{u''}{\mathcal{C}''} + \ldots + C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

En substituant dans ces expressions, les valeurs de u^0, u', u'', etc., tirées des équations (3), on aura effectué l'éli-

mination. Pour déterminer les poids, nous aurons

$$
(5)\quad \begin{cases}
(\alpha\alpha) = \dfrac{1}{\mathcal{A}^0} + \dfrac{A'^2}{\mathcal{B}'} + \dfrac{A''^2}{\mathcal{C}''} + \dfrac{A'''^2}{\mathcal{D}'''} + \ldots, \\
(\beta\beta) = \qquad\quad \dfrac{1}{\mathcal{B}'} + \dfrac{B''^2}{\mathcal{C}''} + \dfrac{B'''^2}{\mathcal{D}'''} + \ldots, \\
(\gamma\gamma) = \qquad\qquad\quad \dfrac{1}{\mathcal{C}''} + \dfrac{C'''^2}{\mathcal{D}'''} + \ldots. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

La simplicité de ces formules ne laisse rien à désirer. On trouverait des formules également simples pour exprimer les autres coefficients $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, $(\beta\gamma)$, etc.; mais, comme leur usage est moins fréquent, nous nous dispenserons de les exposer.

33.

L'importance du sujet nous a engagé à tout préparer pour le calcul et à former les expressions explicites des coefficients A', A'', A''', B'', B''', etc.

Ce calcul peut être abordé de deux manières : la première consiste à reporter, dans les équations (2), les valeurs de u^0, u', u'', etc., déduites du système (3), qui doivent rendre ces équations identiques; et la seconde à exprimer, au contraire, que le système (2) devient identique lorsqu'on y substitue les valeurs de ξ, η, ζ, déduites du système (3).

La première méthode conduit aux formules suivantes :

$$
\frac{\mathcal{B}^0}{\mathcal{A}^0} + A' = 0,
$$

$$
\frac{\mathcal{C}^0}{\mathcal{A}^0} + \frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{B}'}A' + A'' = 0,
$$

$$
\frac{\mathcal{D}^0}{\mathcal{A}^0} + \frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{B}'}A' + \frac{\mathcal{D}''}{\mathcal{C}''}A'' + A''' = 0,
$$

$$
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
$$

Ces formules feront connaître A', A'', A''', etc.

On aura ensuite,

$$\frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{B}'} + B'' = 0,$$

$$\frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{B}'} + \frac{\mathcal{D}''}{\mathcal{C}''} B'' + B''' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

qui donneront B″, B‴, etc. ; puis

$$\frac{\mathcal{D}''}{\mathcal{C}''} + C''' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

qui feront connaître C‴, etc.; et ainsi de suite.

La seconde méthode donne le système suivant:

$$\mathcal{A}^0 A' + \mathcal{B}^0 = 0,$$

d'où l'on tire A′;

$$\mathcal{A}^0 A'' + \mathcal{B}^0 B'' + \mathcal{C}^0 = 0,$$
$$\mathcal{B}' B'' + \mathcal{C}' = 0,$$

d'où l'on tire B″ et A″;

$$\mathcal{A}^0 A''' + \mathcal{B}^0 B''' + \mathcal{C}^0 C''' + \mathcal{D}^0 = 0,$$
$$\mathcal{B}' B''' + \mathcal{C}' C''' + \mathcal{D}' = 0,$$
$$\mathcal{C}'' C''' + \mathcal{D}'' = 0,$$

d'où l'on déduira C‴, B‴, A‴; et ainsi de suite.

Les deux systèmes de formules offrent des avantages à peu près égaux, lorsque l'on veut les poids des déterminations de toutes les inconnues x, y, z, etc. ; mais lorsqu'on ne cherche qu'une seule des quantités $(\alpha\alpha)$, $(\beta\beta)$, $(\gamma\gamma)$, etc., le premier système est bien préférable.

D'ailleurs, la combinaison des équations (1) et (4) conduit aux mêmes formules, et fournit, en outre, un second moyen d'obtenir les valeurs les plus plausibles

A, B, C, etc., qui sont

$$A = -\frac{\xi^0}{\mathfrak{A}^0} - A'\frac{\xi'}{\mathfrak{B}'} - A''\frac{\xi''}{\mathfrak{C}''} - A'''\frac{\xi'''}{\mathfrak{D}'''} - \ldots,$$

$$B = \qquad -\frac{\xi'}{\mathfrak{B}'} - B''\frac{\xi''}{\mathfrak{C}''} - B'''\frac{\xi'''}{\mathfrak{D}'''} - \ldots,$$

$$C = \qquad\qquad -\frac{\xi''}{\mathfrak{C}''} - C'''\frac{\xi'''}{\mathfrak{D}'''} - \ldots,$$

. . . .

L'autre calcul est identique avec le calcul ordinaire dans lequel on suppose

$$u^0 = 0, \quad u' = 0, \quad u'' = 0, \ldots.$$

34.

Les résultats obtenus dans l'art. 32 ne sont que des cas particuliers d'un théorème plus général qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème — *Si* t *représente la fonction linéaire suivante des inconnues* x, y, z, etc.,

$$t = fx + gy + hz + \ldots + k,$$

dont l'expression en fonction des variables u^0, u', u'', etc., *soit*

$$t = k^0 u^0 + k' u' + k'' u'' + \ldots + K,$$

K *sera la valeur la plus plausible de* t, *et le poids de cette détermination sera*

$$\frac{1}{\mathfrak{A}^0 k^{02} + \mathfrak{B}' k'^2 + \mathfrak{C}'' k''^2 + \ldots}.$$

Démonstration. — La première partie du théorème est évidente, puisque la valeur la plus plausible de t doit correspondre aux valeurs

$$u^0 = 0, \quad u' = 0, \quad u'' = 0, \ldots.$$

Pour démontrer la seconde partie, remarquons que l'on a

$$\frac{1}{2}\, d\Omega = \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz + \ldots,$$

$$dt = f\,dx + g\,dy + h\,dz + \ldots,$$

et par conséquent, lorsque

$$\xi = f, \quad \eta = g, \quad \zeta = h, \ldots,$$

on a

$$d\Omega = 2\,dt,$$

quelles que soient les différentielles dx, dy, dz, etc. Il suit de là qu'en supposant toujours,

$$\xi = f, \quad \eta = g, \quad \zeta = h, \ldots,$$

on aura

$$\frac{u^0}{\mathcal{A}^0}\,du^0 + \frac{u'}{\mathcal{B}'}\,du' + \frac{u''}{\mathcal{C}''}\,du'' + \ldots$$
$$= k^0 du^0 + k' du' + k'' du'' + \ldots .$$

Or on voit facilement que si les différentielles dx, dy, dz, etc., sont indépendantes les unes des autres, il en sera de même de du^0, du', du'', etc.; nous aurons, par conséquent, pour

$$\xi = f, \qquad \eta = g, \qquad \zeta = h, \ldots,$$
$$u^0 = \mathcal{A}^0 k^0, \quad u' = \mathcal{B}' k', \quad u'' = \mathcal{C}'' k'', \ldots .$$

Par conséquent, la valeur de Ω correspondant aux mêmes hypothèses, sera

$$\mathcal{A}^0 k^{02} + \mathcal{B}' k'^2 + \mathcal{C}'' k''^2 + \ldots + \mathrm{M}:$$

ce qui, d'après l'art. 29, démontre l'exactitude de notre théorème.

Si d'ailleurs on désire effectuer la transformation de la fonction t, sans avoir recours aux formules (4) (art. 32), on a immédiatement les relations

$$f = \mathcal{A}^0 k^0,$$
$$g = \mathcal{B}^0 k^0 + \mathcal{B}' k',$$
$$h = \mathcal{C}^0 k^0 + \mathcal{C}' k' + \mathcal{C}'' k'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qui permettront de déterminer k^0, k', k'', etc., et nous aurons enfin

$$\mathrm{K} = -\mathcal{L}^0 k^0 - \mathcal{L}' k' - \mathcal{L}'' k'' - \ldots .$$

35.

Nous traiterons particulièrement le problème suivant, tant à cause de son utilité pratique, que de la simplicité de la solution :

Trouver les changements que les valeurs les plus plausibles des inconnues subissent par l'adjonction d'une nouvelle équation, et assigner les poids de ces nouvelles déterminations.

Conservons les notations précédentes. Les équations primitives, réduites à avoir pour poids l'unité, seront

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0, \ldots ;$$

on aura

$$\Omega = v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots,$$

ξ, η, ζ, etc., seront les dérivées partielles

$$\frac{d\Omega}{2dx}, \quad \frac{d\Omega}{2dy}, \quad \frac{d\Omega}{2dz}, \ldots,$$

et enfin on aura, par l'élimination,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = A + (\alpha\alpha)\,\xi + (\alpha\beta)\,\eta + (\alpha\gamma)\,\zeta + \ldots, \\ y = B + (\alpha\beta)\,\xi + (\beta\beta)\,\eta + (\beta\gamma)\,\zeta + \ldots, \\ z = C + (\alpha\gamma)\,\xi + (\beta\gamma)\,\eta + (\gamma\gamma)\,\zeta + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Supposons maintenant que l'on ait une nouvelle équation approximative,

$$v^* = 0,$$

dont nous supposerons le poids égal à l'unité. Cherchons les changements que subiront les valeurs les plus plausibles A, B, C, etc., et celles des coefficients $(\alpha\alpha)$, $(\beta\beta)$, etc.

Posons

$$\Omega + v^{*2} = \Omega^*,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega^*}{dx} = \xi^*, \quad \frac{1}{2}\frac{d\Omega^*}{dy} = \eta^*, \quad \frac{1}{2}\frac{d\Omega^*}{dz} = \zeta^*, \ldots,$$

et soit

$$x = A^* + (\alpha\alpha^*)\,\xi^* + (\alpha\beta^*)\,\eta^* + (\alpha\gamma^*)\,\zeta^* + \ldots$$

le résultat de l'élimination.

Soit enfin,

$$v^* = fx + gy + hz + \dots + k,$$

qui deviendra, en ayant égard aux équations (1),

$$v^* = F\xi + G\eta + H\zeta + \dots + K,$$

et posons

$$Ff + Gg + Hh + \dots = \omega;$$

K sera évidemment la valeur la plus plausible de la fonction v^*, telle qu'elle résulte des équations primitives, sans avoir égard à la valeur o fournie par la nouvelle observation, et $\frac{1}{\omega}$ sera le poids de cette détermination.

Or nous avons

$$\xi^* = \xi + fv^*, \quad \eta^* = \eta + gv^*, \quad \zeta^* = \zeta + hv^*, \dots,$$

et, par suite,

$$F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \dots + K = v^*(1 + Ff + Gg + Hh + \dots);$$

d'où l'on déduit

$$v^* = \frac{F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \dots + K}{1 + \omega}.$$

On a, en outre,

$$\begin{aligned} x &= A + (\alpha\alpha)\xi^* + (\alpha\beta)\eta^* + (\alpha\gamma)\zeta^* + \dots \\ &\qquad - v^*[f(\alpha\alpha) + g(\alpha\beta) + h(\alpha\gamma) + \dots] \\ &= A + (\alpha\alpha)\xi^* + (\alpha\beta)\eta^* + \dots - Fv^*, \\ &= A + (\alpha\alpha)\xi^* + (\alpha\beta)\eta^* + \dots - \frac{F}{1+\omega}(F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \dots K). \end{aligned}$$

Nous déduirons de là,

$$A^* = A - \frac{FK}{1+\omega};$$

qui sera la valeur la plus plausible de x, déduite de *toutes* les observations.



On aura aussi

$$(\alpha\alpha^*) = (\alpha\alpha) - \frac{F^2}{1+\omega};$$

par conséquent,

$$\frac{1}{(\alpha\alpha) - \frac{F^2}{1+\omega}}$$

sera le poids de cette détermination.

On trouvera de la même manière, pour valeur la plus plausible de y, déduite de *toutes* les observations,

$$B^* = B - \frac{GK}{1+\omega}:$$

le poids de cette détermination sera

$$\frac{1}{\frac{1}{(\beta\beta)} - \frac{G^2}{1+\omega}}:$$

et ainsi de suite.

Le problème est donc résolu.

Ajoutons quelques remarques.

I. En substituant les nouvelles valeurs A^*, B^*, C^*, etc., la fonction v^* obtiendra la valeur la plus plausible

$$K - \frac{K}{1+\omega}(Ff + Gg + Hh + \ldots) = \frac{K}{1+\omega},$$

et, puisque l'on a, identiquement,

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}\xi^* + \frac{G}{1+\omega}\eta^* + \frac{H}{1+\omega}\zeta^* + \ldots + \frac{K}{1+\omega},$$

le poids de cette détermination sera (art. 29)

$$\frac{1+\omega}{Ff + Gg + Hh + \ldots} = \frac{1}{\omega} + 1.$$

Ces résultats pourraient se déduire immédiatement des règles exposées à la fin de l'art. 21. L'ensemble des équations primitives avait, en effet, fourni la détermination $v^* = K$, dont le poids était $\frac{1}{\omega}$, une observation nouvelle

donne une autre détermination $v^* = 0$, indépendante de la première, ayant pour poids l'unité; leur combinaison donnera la détermination

$$v^* = \frac{K}{1 + \omega},$$

qui aura pour poids

$$\frac{1}{\omega} + 1.$$

II. On conclut de ce qui précède que, pour

$$x = A^*, \quad y = B^*, \quad z = C^*, \ldots,$$

on devra avoir

$$\xi^* = 0, \quad \eta^* = 0, \quad \zeta^* = 0, \ \ldots,$$

et, par suite,

$$\xi = -\frac{fK}{1 + \omega}, \quad \eta = -\frac{gK}{1 + \omega}, \quad \zeta = -\frac{hK}{1 + \omega}, \ldots.$$

Puisque d'ailleurs

$$\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \ldots + M,$$
$$\Omega^* = \Omega + v^{*2},$$

on devra avoir, pour ces mêmes valeurs,

$$\Omega = \frac{K^2}{(1 + \omega)^2}(Ff + Gg + Hh + \ldots) + M = M + \frac{\omega K^2}{(1 + \omega)^2},$$

et

$$\Omega^* = M + \frac{\omega K^2}{(1 + \omega)^2} + \frac{K^2}{(1 + \omega)^2} = M + \frac{K^2}{1 + \omega}.$$

III. En comparant ces résultats avec ceux de l'article 30, nous voyons ici que la fonction Ω a la plus petite valeur qu'elle puisse obtenir lorsqu'on s'impose la condition

$$v^* = \frac{K}{1 + \omega}.$$

36.

Nous donnerons seulement ici la solution du problème suivant, qui a beaucoup d'analogie avec le précédent; mais nous nous abstiendrons d'indiquer la démonstration, à laquelle le lecteur suppléera facilement en s'aidant de ce qui précède.

Trouver les changements des valeurs les plus plausibles des inconnues et les poids des déterminations nouvelles, lorsque l'on change le poids de l'une des observations primitives.

Supposons qu'après avoir achevé le calcul on vienne à remarquer qu'on a attribué à une observation, à la première par exemple qui a donné $V = L$, un poids trop fort ou trop faible, et qu'il serait plus exact de lui attribuer le poids p^*, au lieu du poids p : il ne sera pas nécessaire de recommencer le calcul, mais il sera plus commode de former les corrections à l'aide des formules suivantes.

Les valeurs les plus plausibles des inconnues deviendront

$$x = A - \frac{(p^* - p)\,\alpha\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)},$$
$$y = B - \frac{(p^* - p)\,\beta\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)},$$
$$z = C - \frac{(p^* - p)\,\gamma\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les poids de ces déterminations s'obtiendront en divisant l'unité, respectivement, par

$$(\alpha\alpha) - \frac{(p^* - p)\,\alpha^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)},$$
$$(\beta\beta) - \frac{(p^* - p)\,\beta^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + a\beta + c\gamma + \ldots)},$$
$$(\gamma\gamma) - \frac{(p^* - p)\,\gamma^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette solution convient au cas où, après avoir achevé le

calcul, il faudrait rejeter tout à fait l'une des observations, puisque cela revient à faire $p^* = 0$; de même, $p^* = \infty$ conviendra au cas où l'équation $V = L$, qui dans le calcul avait été regardée comme approchée, serait rigoureusement exacte.

Si, après le calcul terminé, *plusieurs* équations nouvelles venaient s'adjoindre aux proposées, ou si les poids attribués à *plusieurs* d'entre elles étaient erronés, le calcul des corrections deviendrait trop compliqué, et il serait préférable de tout recommencer.

37.

Nous avons donné, dans les art. 15 et 16, une méthode pour déterminer, approximativement, la précision d'un système d'observations (*); mais cette méthode suppose connues exactement les erreurs réelles que l'on a *effectivement* rencontrées dans une suite nombreuse d'observations; or cette condition n'est remplie que bien rarement, pour ne pas dire jamais.

Si les quantités dont l'observation fournit les valeurs approchées dépendent, suivant une loi donnée, d'une ou de plusieurs inconnues, on pourra trouver, par la méthode des moindres carrés, les valeurs les plus plausibles de ces inconnues; si, dès lors, on calcule les valeurs correspondantes des grandeurs observées, ces dernières pourront être regardées comme différant peu des véritables : de sorte que leurs différences avec les valeurs observées, représenteront les erreurs commises avec une certitude d'autant plus grande, que les observations seront plus nombreuses. Telle est la marche suivie dans la pratique par les calcu-

---

(*) Les recherches sur le même sujet insérées par nous (*Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*, vol. I, page 185) sont fondées sur l'hypothèse relative à la probabilité des erreurs à laquelle nous avions été conduit dans la *Théorie du Mouvement des Corps célestes*.

(*Note de* M. Gauss.)

On trouvera ce Mémoire à la fin du volume. J. B.

lateurs, qui ont essayé, dans des cas compliqués, d'évaluer à posteriori la précision des observations. Quoique suffisante dans bien des cas, cette méthode est, théoriquement, inexacte et pourrait quelquefois conduire à de graves erreurs; c'est pourquoi il est très-important de traiter la question avec plus de soin.

Conservons les notations de l'art. 19. La méthode dont il s'agit consiste à regarder A, B, C, etc., comme les véritables valeurs des inconnues x, y, z, etc., et λ, λ', λ'', etc., comme celles des fonctions v, v', v'', etc. Si toutes les observations ont une égale précision et que leur poids commun

$$p = p' = p'' = \ldots$$

soit pris pour unité, ces mêmes quantités, changées de signe, représentent, dans cette supposition, les erreurs des observations, et, par conséquent, d'après l'art. 15,

$$m = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \ldots}{\varpi}} = \sqrt{\frac{M}{\varpi}}$$

sera l'erreur moyenne des observations. Si les observations n'ont pas la même précision, $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\lambda''$, etc., représenteront les erreurs des observations, respectivement multipliées par les racines carrées des poids, et les règles de l'art. 16 conduiront à la même formule,

$$\sqrt{\frac{M}{\varpi}},$$

qui exprime déjà l'erreur moyenne de ces observations lorsque leur poids est égal à l'unité.

Mais le calcul exact exigerait évidemment que l'on remplaçât λ, λ', λ'', etc., par les valeurs de v, v', v'', etc., déduites des véritables valeurs des inconnues x, y, z, etc., et la quantité M par la valeur correspondante de Ω. Quoique l'on ne puisse pas assigner cette dernière valeur, nous sommes certain pourtant qu'elle est plus grande que M qui est son minimum : elle n'atteindrait cette limite que dans le cas, infiniment peu probable, où les va-

leurs véritables des inconnues se confondraient avec les plus plausibles. Nous pouvons donc affirmer, en général, que l'erreur moyenne calculée par la pratique ordinaire est plus petite que l'erreur moyenne exacte, et que l'on attribue, par conséquent, aux observations une trop grande précision.

Voyons ce que donne une théorie rigoureuse.

38.

Avant tout, il faut chercher comment la quantité M dépend des véritables erreurs des observations. Désignons ces erreurs, comme dans l'art. 28, par e, e', e'', etc., et posons, pour plus de simplicité,

$$e\sqrt{p} = \varepsilon, \quad e'\sqrt{p'} = \varepsilon', \quad e''\sqrt{p''} = \varepsilon'', \ldots,$$

et

$$m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''} = \ldots = \mu.$$

Soient

$$\mathrm{A} - x^0, \quad \mathrm{B} - y^0, \quad \mathrm{C} - z^0, \ldots,$$

les vraies valeurs des inconnues x, y, z, etc., pour lesquelles ξ, η, ζ, etc., soient, respectivement, $-\xi^0$, $-\eta^0$, $-\zeta^0$, etc. Les valeurs correspondantes de v, v', v'', etc., seront évidemment

$$-\varepsilon, \quad -\varepsilon', \quad -\varepsilon'', \ldots;$$

de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \ldots, \\
\eta^0 &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \ldots, \\
\zeta^0 &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^0 &= \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \ldots, \\
y^0 &= \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \ldots, \\
z^0 &= \gamma\varepsilon + \gamma'\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'' + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

enfin

$$\Omega^0 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \ldots$$

sera la valeur de la fonction Ω, correspondant aux vraies valeurs des variables x, y, z, etc.

Puisque l'on a identiquement

$$\Omega = \mathrm{M} + (x - \mathrm{A})\,\xi + (y - \mathrm{B})\,\eta + (z - \mathrm{C})\,\zeta + \ldots,$$

on aura aussi

$$\mathrm{M} = \Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \ldots.$$

De là, il résulte évidemment que M est une fonction homogène du deuxième degré des erreurs e, e', e'', etc.; cette fonction pour diverses valeurs des erreurs pourra devenir plus ou moins grande. Dans l'ignorance où nous sommes de ces valeurs, il est bon d'examiner attentivement la fonction M, et de calculer d'abord sa valeur moyenne d'après les principes du calcul des probabilités. Nous obtiendrons cette valeur moyenne en remplaçant les carrés e^2, e'^2, etc., par m^2, m'^2, etc., et en omettant les termes en ee', ee'', etc., dont la valeur moyenne est zéro; ou, ce qui revient au même, en remplaçant chaque carré $\varepsilon^2, \varepsilon'^2, \varepsilon''^2, \ldots$, par μ^2, et en négligeant $\varepsilon\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon''$, ... D'après cela, le terme Ω^0 fournira $\varpi\mu^2$; le terme $-x^0\xi^0$ donnera

$$-(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots)\mu^2 = -\mu^2;$$

chacune des autres parties donnera également $-\mu^2$, de sorte que la valeur moyenne totale sera

$$(\varpi - \rho)\,\mu^2,$$

ϖ désignant le nombre des observations, et ρ le nombre des inconnues. La vraie valeur de M pourra, suivant les cas que le hasard présentera, être plus grande ou plus petite que cette valeur moyenne, mais la différence sera d'autant moindre que le nombre des observations sera plus grand; de sorte que

$$\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\varpi - \rho}}$$

pourra être regardé comme une valeur approchée de μ : par conséquent la valeur de μ, fournie par la méthode erronée dont nous avons parlé dans l'article précédent, devra être augmentée dans le rapport de $\sqrt{\varpi - \rho}$ à $\sqrt{\varpi}$.

39.

Afin de faire voir plus clairement jusqu'à quel point il est permis de regarder la valeur de M, fournie par les observations, comme égale à la valeur exacte, il faut chercher quelle est l'erreur moyenne à craindre lorsque l'on fait

$$\mu^2 = \frac{M}{\varpi - \rho}.$$

Cette erreur moyenne est la racine carrée de la valeur moyenne de la quantité

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \ldots - (\varpi - \rho)\mu^2}{\varpi - \rho}\right)^2,$$

que nous écrirons ainsi :

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \ldots}{\varpi - \rho}\right)^2$$

$$- \frac{2\mu^2}{\varpi - \rho}[\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \ldots - (\varpi - \rho)\mu^2] - \mu^4;$$

et comme la valeur moyenne du second terme est évidemment nulle, la question se réduit à chercher la valeur moyenne de la fonction

$$\Psi = (\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \ldots)^2.$$

Désignons cette valeur moyenne par N, l'erreur moyenne cherchée sera

$$\sqrt{\frac{N}{(\varpi - \rho)^2} - \mu^4}.$$

Si l'on développe la fonction Ψ, on voit qu'elle est une fonction homogène des erreurs e, e', e'', etc., ou, ce qui revient au même, des quantités ε, ε', ε'', etc.; on trouvera donc la valeur moyenne :

1°. En remplaçant les quatrièmes puissances e^4, e'^4, e''^4, etc., par leurs valeurs moyennes;

2°. En remplaçant les produits $e^2 e'^2$, $e^2 e''^2$, etc., par leurs valeurs moyennes, c'est-à-dire par $m^2 m'^2$, $m^2 m''^2$, etc.;

3°. En négligeant les produits tels que $e^3 e'$, $e^2 e' e''$, etc.

Nous supposerons (art. 16) les valeurs moyennes de e^4, e'^4, e''^4, etc., proportionnelles à m^4, m'^4, m''^4, etc, de sorte que les rapports des unes aux autres soient $\frac{\nu^4}{\mu^4}$, ν^4 désignant la valeur moyenne des quatrièmes puissances des erreurs pour les observations dont le poids serait l'unité.

Les règles précédentes pourraient se traduire de cette autre manière :

Remplacer chaque quatrième puissance ε^4, ε'^4, ε''^4, etc., par ν^4; chaque produit $\varepsilon^2 \varepsilon'^2$, $\varepsilon^2 \varepsilon''^2$, etc., par μ^4, et négliger tous les termes, tels que $\varepsilon^3 \varepsilon'$ ou $\varepsilon^2 \varepsilon' \varepsilon''$, $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''$.

Ces principes étant compris, on verra facilement que :

I. La valeur moyenne de Ω^{o2} est

$$\varpi\nu^4 + (\varpi^2 - \varpi)\,\mu^4.$$

II. La valeur moyenne du produit $\varepsilon^2 x^0 \xi^0$ est

$$a\,\alpha\nu^4 + (a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots)\,\mu^4 = a\,\alpha\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4,$$

car

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots = 1.$$

De même, la valeur moyenne de $\varepsilon'^2 x^0 \xi^0$ est

$$a'\alpha'\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4;$$

la valeur moyenne de $\varepsilon''^2 x^0 \xi^0$ est

$$a''\alpha''\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4;$$

et ainsi de suite.

Donc la valeur moyenne du produit

$$(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \ldots)\,x^0\xi^0 \quad \text{ou} \quad \Omega^0 x^0 \xi^0$$

sera

$$\nu^4 - \mu^4 + \varpi\mu^4.$$

Les produits $\Omega^0 y^0 \eta^0$ ou $\Omega^0 z^0 \zeta^0$, etc., auront la même

valeur moyenne; donc le produit

$$\Omega^{0}(x^{0}\xi^{0}+y^{0}\eta^{0}+z^{0}\zeta^{0}+\ldots)$$

aura pour valeur moyenne

$$\rho\nu^{4}+\rho(\varpi-1)\mu^{4}.$$

III. Afin d'abréger les développements qui vont suivre, nous adopterons la notation suivante. Nous attribuerons à la caractéristique Σ un sens plus étendu que nous ne l'avons fait jusqu'ici, en lui faisant désigner la somme des termes semblables, mais non identiques, qui proviennent de toutes les permutations des observations. Nous aurons, d'après cette notation,

$$x^{0}=\sum\alpha\varepsilon,$$

$$x^{02}=\sum\alpha^{2}\varepsilon^{2}+2\sum\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'.$$

Calculant par parties la valeur moyenne du terme $x^{02}\xi^{02}$, nous aurons d'abord, pour valeur moyenne du produit $\alpha^{2}\varepsilon^{2}\xi^{02}$,

$$a^{2}\alpha^{2}\nu^{4}+\alpha^{2}(a'^{2}+a''^{2}+\ldots)\mu^{4}$$

$$=a^{2}\alpha^{2}(\nu^{4}-\mu^{4})+\alpha^{2}\mu^{4}\sum a^{2}.$$

De même, la valeur moyenne du produit $\alpha'^{2}\varepsilon'^{2}\xi^{02}$, est

$$a'^{2}\alpha'^{2}(\nu^{4}-\mu^{4})+\alpha'^{2}\mu^{4}\sum a^{2};$$

et ainsi de suite.

Par conséquent, la valeur moyenne du produit

$$\xi^{02}\sum\alpha^{2}\varepsilon^{2}$$

sera

$$(\nu^{4}-\mu^{4})\sum a^{2}\alpha^{2}+\mu^{4}\sum a^{2}.\sum\alpha^{2}.$$

Or la valeur moyenne de $\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'\xi^{02}$ est

$$2\alpha\alpha' aa'\mu^{4}.$$

La valeur moyenne de $\alpha\alpha''\varepsilon\varepsilon''\xi^{02}$ est

$$2\,\alpha\alpha''aa''\mu^4;$$

et ainsi de suite. D'où l'on conclut facilement que la valeur moyenne du produit

$$\xi^{02}\sum\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$$

est

$$2\mu^4\sum\alpha a\,\alpha'a' = \mu^4\left[\left(\sum a\alpha\right)^2 - \sum a^2\alpha^2\right] = \mu^4\left(1 - \sum a^2\alpha^2\right).$$

Ceci posé, nous aurons pour valeur moyenne du produit $x^{02}\,\xi^{02}$,

$$(\nu^4 - 3\mu^4)\sum a^2\alpha^2 + 2\mu^4 + \mu^4\sum a^2.\sum\alpha^2.$$

IV. On trouvera d'une manière analogue, pour valeur moyenne du produit $x^0 y^0 \xi^0 \eta^0$,

$$\nu^4\sum ab\,\alpha\beta + \mu^4\sum a\alpha\,b'\beta' + \mu^4\sum ab\,\alpha'\beta' + \mu^4\sum a\beta b'\alpha'.$$

Or on a

$$\sum a\alpha\,b'\beta' = \sum a\alpha\,.\sum b\beta - \sum a\alpha\,b\beta,$$

$$\sum ab\,\alpha'\beta' = \sum ab\,.\sum\alpha\beta - \sum ab\,\alpha\beta,$$

$$\sum a\beta\,b'\alpha' = \sum a\beta\,.\sum b\alpha - \sum a\beta\,b\alpha,$$

$$\sum a\alpha = 1,\quad \sum b\beta = 1,\quad \sum a\beta = 0,\quad \sum b\alpha = 0;$$

cette valeur moyenne sera donc

$$(\nu^4 - 3\mu^4)\sum ab\,\alpha\beta + \mu^4\left(1 + \sum ab\,.\sum\alpha\beta\right).$$

V. On trouverait, par un calcul semblable, que la valeur moyenne de $x^0 z^0 \xi^0 \zeta^0$ est

$$(\nu^4 - 3\mu^4)\sum ac\,\alpha\gamma + \mu^4\left(1 + \sum ac\,.\sum\alpha\gamma\right);$$

et ainsi de suite. En additionnant, on obtient la valeur moyenne du produit

$$x^0\xi^0(x^0\xi^0+y^0\eta^0+z^0\zeta^0+\ldots);$$

cette valeur est

$$\begin{aligned}&(\nu^4-3\mu^4)\sum[a\alpha(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)]\\&+(\rho+1)\mu^4+\mu^4\left(\sum a^2.\sum\alpha^2+\sum ab.\sum\alpha\beta+\sum ac.\sum\alpha\gamma+\ldots\right)\\&=(\nu^4-3\mu^4)\sum[a\alpha(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)]+(\rho+2)\mu^4.\end{aligned}$$

VI. On trouverait de la même manière

$$(\nu^4-3\mu^4)\sum[b\beta(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)]+(\rho+2)\mu^4$$

pour valeur moyenne du produit

$$y^0\eta^0(x^0\xi^0+y^0\eta^0+z^0\zeta^0+\ldots),$$

et

$$(\nu^4-3\mu^4)\sum[c\gamma(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)]+(\rho+2)\mu^4$$

pour valeur moyenne du produit

$$z^0\zeta^0(x^0\xi^0+y^0\eta^0+z^0\zeta^0+\ldots);$$

et ainsi de suite.

Nous aurons donc, par l'addition, la valeur moyenne du carré

$$(x^0\xi^0+y^0\eta^0+z^0\zeta^0+\ldots)^2;$$

elle sera

$$(\nu^4-3\mu^4)\sum[(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)^2]+(\rho^2+2\rho)\mu^4.$$

VII. Nous concluons enfin de tous ces préliminaires,

$$\begin{aligned}N&=(\varpi-2\rho)\nu^4+(\varpi^2-\varpi-2\varpi\rho+4\rho+\rho^2)\mu^4\\&\quad+(\nu^4-3\mu^4)\sum[(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)^2]\\&=(\varpi-\rho)(\nu^4-\mu^4)+(\varpi-\rho)^2\mu^4\\&\quad-(\nu^4-3\mu^4)\left[\rho-\sum\left(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots\right)^2\right].\end{aligned}$$

Donc l'erreur moyenne à craindre, lorsqu'on prendra

$$\mu^2 = \frac{M}{\varpi - \rho},$$

sera

$$\sqrt{\frac{\nu^4 - \mu^4}{\varpi - \rho} - \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\varpi - \rho)^2}\left[\rho - \sum\left(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots\right)^2\right]}.$$

40.

La quantité

$$\sum[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)^2],$$

qui entre dans l'expression précédente, ne peut pas généralement se réduire à une forme plus simple. Cependant on peut assigner deux limites entre lesquelles sa valeur doit nécessairement être comprise :

1°. On déduit facilement des relations précédentes,

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)^2 + (a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + \ldots)^2$$
$$+ (a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + \ldots)^2 + \ldots = a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots;$$

d'où nous concluons que

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots$$

est une quantité positive plus petite que l'unité, ou du moins qu'elle n'est pas plus grande. Il en sera de même de la quantité

$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \ldots,$$

qui est égale à la somme

$$(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \ldots)^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \ldots)^2$$
$$+ (a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + \ldots)^2 + \ldots;$$

de même

$$a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \ldots$$

sera plus petit que l'unité ; et ainsi de suite. Donc

$$\sum[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)^2]$$

est nécessairement plus petit que ϖ.

2°. On a

$$\sum(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots) = \rho,$$

car

$$\sum a\alpha = 1, \quad \sum b\beta = 1, \quad \sum c\gamma = 1, \ldots;$$

d'où l'on déduit facilement que

$$\sum[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots)^2]$$

est plus grand, ou du moins n'est pas plus petit, que $\frac{\rho^2}{\varpi}$.

Par conséquent le terme

$$\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\varpi - \rho)^2}\left[\rho - \sum\left(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots\right)^2\right]$$

est nécessairement compris entre les limites

$$-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\varpi - \rho} \quad \text{et} \quad \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\varpi - \rho}\,\frac{\rho}{\varpi},$$

ou bien, entre les limites plus étendues,

$$-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\varpi - \rho} \quad \text{et} \quad \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\varpi - \rho}.$$

Donc le carré de l'erreur moyenne à craindre pour la valeur

$$\mu^2 = \frac{M}{\varpi - \rho}$$

est compris entre les limites

$$\frac{2\nu^4 - 4\mu^4}{\varpi - \rho} \quad \text{et} \quad \frac{2\mu^4}{\varpi - \rho};$$

de sorte qu'on pourra atteindre un degré de précision aussi grand que l'on voudra, pourvu que le nombre des observations soit suffisamment grand.

Il est très-remarquable que dans l'hypothèse de l'art. 9 (III), sur laquelle nous nous étions autrefois appuyé pour établir la théorie des moindres carrés, le second terme du carré de l'erreur moyenne disparaît complétement (car on a $\nu^4 - 3\mu^4 = 0$); et comme, pour trouver la valeur approchée μ, de l'erreur moyenne des observations, il faut, dans tous les cas, traiter la somme

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \ldots = M,$$

comme si elle était égale à la somme des carrés des $\varpi - \rho$ erreurs fortuites, il en résulte que, dans cette hypothèse, la précision de cette détermination devient égale à celle que nous avons trouvée, art. 15, pour la détermination déduite de $\varpi - \rho$ erreurs vraies.

SUPPLÉMENT

A LA

THÉORIE DE LA COMBINAISON DES OBSERVATIONS

QUI EXPOSE AUX MOINDRES ERREURS.

PRÉSENTÉ LE 16 SEPTEMBRE 1826 A LA SOCIÉTÉ ROYALE DE GOTTINGUE.

1.

Dans le Mémoire précédent, on a supposé que les quantités à déterminer, à l'aide d'observations imparfaites, fussent dépendantes de certains éléments inconnus, en fonction desquels on sût les exprimer : le problème consistait alors à déduire des observations, le plus exactement possible, la valeur de ces éléments.

Dans la plupart des cas, c'est effectivement ainsi que la question se présente; mais quelquefois il en est un peu autrement, et l'on pourrait même se demander, au premier abord, si le problème se ramène au précédent. Il n'est pas rare, en effet, que les quantités auxquelles se rapportent les observations ne soient pas explicitement exprimées en fonction de certains éléments, et qu'elles ne paraissent réductibles à une telle forme que par des opérations difficiles ou ambiguës. Il arrive souvent, d'autre part, que la nature du problème fournit certaines conditions auxquelles les valeurs observées doivent rigoureusement satisfaire.

Cependant, en y regardant de plus près, on aperçoit que ce cas ne diffère pas essentiellement du précédent, et qu'il peut s'y ramener. Si l'on nomme, en effet, ϖ le nombre des grandeurs observées, et σ celui des équations de condition,

en choisissant, parmi les premières, $\varpi - \sigma$ quantités, rien ne nous empêche de les considérer comme nos seules inconnues, les autres étant regardées comme des fonctions de celles-là, que les équations de condition définissent. Par cet artifice, nous rentrerons dans le cas du Mémoire précédent.

Néanmoins, quoique cette marche conduise souvent au résultat d'une manière assez commode, on ne peut nier qu'elle ne soit moins naturelle, et il est, par conséquent, désirable de traiter le problème sous l'autre forme, qui admet, du reste, une solution très-élégante. Il y a plus : cette solution nouvelle, conduisant à des calculs plus rapides que la précédente toutes les fois que σ est moindre que $\frac{1}{2}\varpi$, ou, ce qui revient au même, toutes les fois que le nombre des éléments que nous avons désigné par ρ dans le Mémoire précédent, est plus grand que $\frac{\varpi}{2}$, il faudra, dans ce cas, préférer la solution nouvelle, quand bien même il serait facile, par la nature du problème, de faire disparaître sans ambiguïté les équations de condition.

2.

Désignons par v, v', v'', etc., les quantités, en nombre ϖ, dont les valeurs sont fournies par l'observation. Supposons qu'une inconnue dépende de celles-là et soit exprimée par une fonction connue u, de v, v', v'', etc. Soient l, l', l'', etc., ce que deviennent les quotients différentiels

$$\frac{du}{dv}, \quad \frac{du}{dv'}, \quad \frac{du}{dv''}, \ldots,$$

lorsqu'on y substitue à v, v', v'', etc., leurs valeurs véritables. Si l'on substituait à v, v', v'', etc., dans la fonction u, leurs valeurs véritables, on obtiendrait aussi la véritable valeur de u; mais si les observations sont affec-

tées d'erreurs e, e', e'', etc., il en résultera pour u une erreur totale représentée par

$$le + l'e' + l''e'' + \ldots,$$

pourvu que l'on puisse, comme nous le supposerons toujours (lorsque u n'est pas linéaire), négliger les carrés et les produits des erreurs e, e', e'', etc.

Quoique la grandeur des erreurs e, e', e'', etc., soit incertaine, l'incertitude attachée à la valeur trouvée pour u peut généralement se mesurer par l'*erreur moyenne à craindre* dans la détermination adoptée. D'après les principes développés dans le premier Mémoire, cette erreur moyenne est

$$\sqrt{l^2m^2 + l'^2m'^2 + l''^2m''^2 + \ldots},$$

m, m', m'', etc., étant les erreurs moyennes des diverses observations. Si toutes les observations sont affectées du même degré d'incertitude, cette expression devient

$$m\sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2 + \ldots}.$$

Il est clair d'ailleurs qu'au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, on peut remplacer l, l', l'', etc., par les valeurs que prennent les coefficients différentiels

$$\frac{du}{dv}, \quad \frac{du}{dv'}, \quad \frac{du}{dv''}, \ldots,$$

lorsqu'on y remplace v, v', v'', etc., par leurs valeurs observées.

3.

Lorsque les quantités v, v', v'', etc., sont indépendantes, l'inconnue ne peut se déterminer que d'une seule manière, et l'incertitude attachée au résultat ne peut être ni évitée ni diminuée. Les observations fournissent une valeur de l'inconnue qui n'a, dans ce cas, rien d'arbitraire. Il en est tout autrement lorsque les quantités v, v', v'', etc., sont

liées par des relations nécessaires, que nous supposerons exprimées par σ équations,

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o, \ldots,$$

X, Y, Z, etc., désignant des fonctions données des indéterminées v, v', v'', etc.; car, à la fonction u, on peut, dans ce cas, substituer toute autre fonction U telle, que la différence $U - u$ s'évanouisse identiquement en vertu des équations

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = o, \ldots.$$

Si les observations étaient rigoureusement exactes, cette substitution ne changerait en rien le résultat; mais, en raison des erreurs inévitables, à chaque forme adoptée pour u correspondra un résultat différent, et l'erreur commise, au lieu d'être

$$le + l'e' + l''e'' + \ldots,$$

deviendra

$$Le + L'e' + L''e'' + \ldots,$$

en désignant par L, L', L'', etc., les quotients différentiels

$$\frac{dU}{dv}, \quad \frac{dU}{dv'}, \quad \frac{dU}{dv''}, \ldots.$$

Quoiqu'il soit impossible d'assigner la valeur des diverses erreurs, nous pouvons cependant comparer les erreurs moyennes à craindre dans les diverses combinaisons. La combinaison la plus avantageuse sera celle qui donnera, à l'erreur moyenne, la valeur minimum. Cette erreur étant

$$\sqrt{L^2 m^2 + L'^2 m'^2 + L''^2 m''^2 + \ldots},$$

nous devons chercher à rendre la somme

$$L^2 m^2 + L'^2 m'^2 + L''^2 m''^2 + \ldots,$$

aussi petite que possible.

4.

Les fonctions U, en nombre infini, par lesquelles on peut remplacer u, ne différeront les unes des autres, dans nos recherches, que par les valeurs qu'elles fourniront pour L, L′, L″, etc. : nous devons donc, avant tout, chercher les relations qui existent entre les systèmes de valeurs que peuvent prendre ces coefficients. Désignons par

$$\begin{array}{llll} a, & a', & a'', & \ldots, \\ b, & b', & b'', & \ldots, \\ c, & c', & c'', & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

les valeurs que prennent les coefficients

$$\begin{array}{llll} \frac{dX}{dv}, & \frac{dX}{dv'}, & \frac{dX}{dv''}, & \ldots, \\ \frac{dY}{dv}, & \frac{dY}{dv'}, & \frac{dY}{dv''}, & \ldots, \\ \frac{dZ}{dv}, & \frac{dZ}{dv'}, & \frac{dZ}{dv''}, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

si l'on y substitue pour v, v', v'', etc., leurs valeurs véritables. Il est clair que si l'on donne à v, v', v'', etc., des accroissements dv, dv', dv'', etc., qui ne changent pas X, Y, Z, etc., et leur laissent, par conséquent, la valeur zéro, ces accroissements, qui satisferont aux équations

$$\begin{array}{l} 0 = a\,dv + a'dv' + a''dv'' + \ldots, \\ 0 = b\,dv + b'dv' + b''dv'' + \ldots, \\ 0 = c\,dv + c'dv' + c''dv'' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

ne changeront rien à la valeur de $\mathrm{U} - u$, et l'on aura, par conséquent,

$$0 = (l - \mathrm{L})\,dv + (l' - \mathrm{L}')\,dv' + (l'' - \mathrm{L}'')\,dv'' + \ldots.$$

On en conclut facilement que L, L′, L″, etc., doivent avoir

la forme

$$
\begin{aligned}
L &= l + ax + by + cz + \ldots,\\
L' &= l' + a'x + b'y + c'z + \ldots,\\
L'' &= l'' + a''x + b''y + c''z + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

x, y, z, etc., désignant des multiplicateurs déterminés. Réciproquement, il est clair que, pour toutes les valeurs de x, y, z, etc., on pourra former une fonction U, pour laquelle les valeurs L, L$'$, L$''$, etc., seront précisément celles que fournissent ces équations, et cette fonction pourra, d'après ce qui précède, être substituée à u. La forme la plus simple qu'on puisse lui donner est

$$U = u + xX + yY + zZ + \ldots + u',$$

u' désignant une fonction de v, v', v'', etc., qui s'annule identiquement lorsque X, Y, Z, etc., sont nuls, et dont la valeur, dans le cas actuel, sera maximum ou minimum (car ses dérivées devront toutes s'annuler). Mais l'introduction de cette fonction n'apporte aucune différence dans les résultats.

5.

Il est maintenant facile d'assigner à x, y, z, etc., des valeurs telles, que la somme

$$L^2 m^2 + L'^2 m'^2 + L''^2 m''^2 + \ldots$$

soit un minimum.

Il est clair que pour atteindre ce but, la connaissance des erreurs moyennes absolues m, m', m'', etc., n'est pas nécessaire; il suffit de connaître leurs rapports. Introduisons, en effet, au lieu de ces quantités, les poids des observations, p, p', p'', etc., c'est-à-dire des nombres réciproquement proportionnels à m^2, m'^2, m''^2, etc. Les quantités x, y, z, etc., devront être déterminées de telle sorte que le polynôme

$$\frac{(ax + by + cz + \ldots + l)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z \ldots + l')^2}{p'} + \ldots$$

acquière une valeur minimum. Supposons que x^0, y^0,

z^0, etc., soient les valeurs *déterminées* de x, y, z, etc., auxquelles répond ce minimum, et adoptons les notations suivantes :

$$\frac{a^2}{p}+\frac{a'^2}{p'}+\frac{a''^2}{p''}+\ldots=(aa),$$
$$\frac{ab}{p}+\frac{a'b'}{p'}+\frac{a''b''}{p''}+\ldots=(ab),$$
$$\frac{ac}{p}+\frac{a'c'}{p'}+\frac{a''c''}{p''}+\ldots=(ac),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{b^2}{p}+\frac{b'^2}{p'}+\frac{b''^2}{p''}+\ldots=(bb),$$
$$\frac{c^2}{p}+\frac{c'^2}{p'}+\frac{c''^2}{p''}+\ldots=(cc),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{al}{p}+\frac{a'l'}{p'}+\frac{a''l''}{p''}+\ldots=(al),$$
$$\frac{bl}{p}+\frac{b'l'}{p'}+\frac{b''l''}{p''}+\ldots=(bl),$$
$$\frac{cl}{p}+\frac{c'l'}{p'}+\frac{c''l''}{p''}+\ldots=(cl),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La condition de minimum exige évidemment que l'on ait

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l} 0=(aa)\,x^0+(ab)\,y^0+(ac)\,z^0+\ldots+(al),\\ 0=(ba)\,x^0+(bb)\,y^0+(bc)\,z^0+\ldots+(bl),\\ 0=(ca)\,x^0+(cb)\,y^0+(cc)\,z^0+\ldots+(cl),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Après que ces équations auront fourni les valeurs de x^0, y^0, z^0, etc., on posera

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l} a\,x^0+b\,y^0+c\,z^0+\ldots+l=\mathrm{L},\\ a'\,x^0+b'\,y^0+c'\,z^0+\ldots+l'=\mathrm{L}',\\ a''\,x^0+b''\,y^0+c''\,z^0+\ldots+l''=\mathrm{L}'',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

et la fonction la plus propre à déterminer notre inconnue, à laquelle correspond l'erreur moyenne minimum, sera celle dont les coefficients différentiels, pour les valeurs con-

sidérées des variables, seront égaux à L, L′, L″, etc. Le poids de la détermination ainsi obtenue, sera

(3) $$P = \frac{1}{\frac{L^2}{p} + \frac{L'^2}{p'} + \frac{L''^2}{p''} + \ldots}$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{P}$ sera précisément la valeur que prend le polynôme considéré plus haut, pour les valeurs des variables x, y, z, etc., qui satisfont aux équations (1).

6.

Dans l'article précédent, nous avons montré à déterminer la fonction U qui fournit la détermination la plus convenable de l'inconnue u. Examinons actuellement quelle est la *valeur* qui en résulte Désignons-la par K: on l'obtiendra en substituant, dans U, les valeurs observées des quantités v, v', v'', etc. Soit k la valeur que prend u lorsqu'on y fait les mêmes substitutions, soit enfin $\varkappa$ la véritable valeur de cette inconnue, telle qu'on l'obtiendrait par la substitution des valeurs véritables de v, v', v'', etc., soit dans u, soit dans U. On aura

$$k = \varkappa + le + l'e' + l''e'' \ldots,$$
$$K = \varkappa + Le + L'e' + L''e'' \ldots,$$

et, par conséquent,

$$K = k + (L - l)e + (L' - l')e' + (L'' - l'')e'' + \ldots.$$

Substituant, dans cette équation, à la place de $L - l$, $L' - l'$, $L'' - l''$, etc., leurs valeurs fournies par (2), et posant

(4) $$\begin{cases} ae + a'e' + a''e'' + \ldots = \mathfrak{A}, \\ be + b'e' + b''e'' + \ldots = \mathfrak{B}, \\ ce + c'e' + c''e'' + \ldots = \mathfrak{C}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

nous aurons

(5) $$K = k + \mathfrak{A}x^0 + \mathfrak{B}y^0 + \mathfrak{C}z^0 + \ldots.$$

Il n'est pas possible de calculer $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, etc., par le moyen des formules (4), car les erreurs e, e', e'', etc., qui y figurent, ont des valeurs inconnues, mais on voit facilement que ces quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, etc., ne sont autre chose que les valeurs de X, Y, Z, etc., qui correspondent aux valeurs observées de v, v', v'', etc., et alors le système des équations (1), (3), (5), forme la solution complète de notre problème. Il est clair, en effet, que l'on peut appliquer au calcul de a, a', a'', ..., b, b', b'', etc., la remarque faite à la fin de l'article 2, à l'occasion des quantités l, l', l'', etc., c'est-à-dire remplacer les valeurs véritables de v, v', v'', etc., par les valeurs observées.

7.

On peut substituer à la formule (3), qui représente le poids de la détermination la plus probable, plusieurs expressions qu'il est utile d'indiquer; remarquons, d'abord, qu'en ajoutant les équations (2) après les avoir multipliées par $\frac{a}{p}, \frac{a'}{p'}, \frac{a''}{p''}$, etc., on aura

$$(aa)\,x^0 + (ab)\,y^0 + (ac)\,z^0 + \ldots = \frac{aL}{p} + \frac{a'L'}{p'} + \frac{a''L''}{p''} + \ldots.$$

Le premier membre est nul; en désignant donc, d'après la notation adoptée, le second membre par (aL), on aura

$$(aL) = 0,$$

et de même

$$(bL) = 0, \quad (cL) = 0, \ldots.$$

Multiplions ensuite les équations (2) par $\frac{L}{p}, \frac{L'}{p'}, \frac{L''}{p''}$, etc.; nous aurons, en les ajoutant,

$$\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \ldots = \frac{L^2}{p} + \frac{L'^2}{p'} + \frac{L''^2}{p''} + \ldots,$$

et, par suite, nous avons cette *seconde* expression du poids,

$$P = \frac{1}{\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \ldots}.$$

Si, enfin, nous ajoutons les mêmes équations (2) après les avoir multipliées par $\frac{l}{p}, \frac{l'}{p'}, \frac{l''}{p''}$, etc., nous obtiendrons une *troisième* expression du poids,

$$P = \frac{1}{(al)x^0 + (bl)y^0 + (cl)z^0 + \ldots + (ll)},$$

où l'on a posé, conformément à la notation précédente,

$$\frac{l^2}{p} + \frac{l'^2}{p'} + \frac{l''^2}{p''} + \ldots = (ll).$$

On passera facilement de là à la *quatrième* expression du poids,

$$\frac{1}{P} = (ll) - (aa)\,x^{02} - (bb)\,y^{02} - (cc)\,z^{02} - \ldots$$
$$- 2(ab)\,x^0 y^0 - 2(ac)\,x^0 z^0 - 2(bc)\,y^0 z^0 - \ldots.$$

8.

La solution générale que nous venons d'exposer s'applique principalement au cas où l'on n'a qu'*une seule* inconnue à déterminer. Lorsqu'on cherche, au contraire, les valeurs les plus plausibles de plusieurs inconnues, dépendant des mêmes observations, ou lorsqu'on ignore quelles sont les inconnues qu'il faut, de préférence, déduire des observations, il convient de procéder d'une manière différente, dont nous allons actuellement nous occuper.

Considérons x, y, z, etc., comme des indéterminées, et posons

$$(6)\quad \begin{cases} (aa)x + (ab)\,y + (ac)z + \ldots = \xi, \\ (ab)\,x + (bb)\,y + (bc)z + \ldots = \eta, \\ (ac)\,x + (bc)\,y + (cc)z + \ldots = \zeta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Supposons que l'on en déduise, par l'élimination,

$$(7)\quad \begin{cases} (\alpha\alpha)\,\xi + (\alpha\beta)\,\eta + (\alpha\gamma)\,\zeta + \ldots = x, \\ (\beta\alpha)\,\xi + (\beta\beta)\,\eta + (\beta\gamma)\,\zeta + \ldots = y, \\ (\gamma\alpha)\,\xi + (\gamma\beta)\,\eta + (\gamma\gamma)\,\zeta + \ldots = z; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et remarquons, avant tout, que les coefficients placés symétriquement sont nécessairement égaux, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}(\beta\alpha) &= (\alpha\beta),\\ (\gamma\alpha) &= (\alpha\gamma),\\ (\gamma\beta) &= (\beta\gamma),\\ &\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

comme cela résulte de la théorie de l'élimination et comme d'ailleurs nous le démontrons plus loin; nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} x^0 = -(\alpha\alpha)(al) - (\alpha\beta)(bl) - (\alpha\gamma)(cl) - \ldots,\\ y^0 = -(\beta\alpha)(al) - (\beta\beta)(bl) - (\beta\gamma)(cl) - \ldots,\\ z^0 = -(\gamma\alpha)(al) - (\gamma\beta)(bl) - (\gamma\gamma)(cl) - \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et en posant

$$(9)\quad \begin{cases} (\alpha\alpha)\,\mathfrak{A} + (\alpha\beta)\,\mathfrak{B} + (\alpha\gamma)\,\mathfrak{C} + \ldots = \mathrm{A},\\ (\beta\alpha)\,\mathfrak{A} + (\beta\beta)\,\mathfrak{B} + (\beta\gamma)\,\mathfrak{C} + \ldots = \mathrm{B},\\ (\gamma\alpha)\,\mathfrak{A} + (\gamma\beta)\,\mathfrak{B} + (\gamma\gamma)\,\mathfrak{C} + \ldots = \mathrm{C},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

nous obtiendrons

$$\mathrm{K} = k - \mathrm{A}(al) - \mathrm{B}(bl) - \mathrm{C}(cl) - \ldots;$$

et si nous posons de plus,

$$(10)\quad \begin{cases} a\,\mathrm{A} + b\,\mathrm{B} + c\,\mathrm{C} + \ldots = p\,\varepsilon,\\ a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + \ldots = p'\varepsilon',\\ a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + \ldots = p''\varepsilon'',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

il viendra

$$(11)\qquad \mathrm{K} = k - l\varepsilon - l'\varepsilon' - l''\varepsilon'' - \ldots.$$

9.

La comparaison des équations (7) et (9) nous apprend que les quantités auxiliaires A, B, C, etc., sont les valeurs que prennent les indéterminées x, y, z, etc., lorsque l'on suppose

$$\xi = \mathfrak{A},\quad \eta = \mathfrak{B},\quad \zeta = \mathfrak{C},\ \ldots;$$

on en conclut évidemment,

$$(12)\quad \begin{cases} (aa)\,A + (ab)\,B + (ac)\,C + \ldots = \mathcal{A}, \\ (ba)\,A + (bb)\,B + (bc)\,C + \ldots = \mathcal{B}, \\ (ca)\,A + (cb)\,B + (cc)\,C + \ldots = \mathcal{C}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En ajoutant les équations (10) après les avoir multipliées par $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$, etc., on obtient

$$(13)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \ldots, \\ \text{et de même} \\ \mathcal{B} = b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \ldots, \\ \mathcal{C} = c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ étant, comme on l'a dit, la valeur que prend X lorsqu'on substitue à v, v', v'', etc., leurs valeurs observées; on aperçoit facilement que si l'on applique à chacune de ces quantités les corrections $-\varepsilon, -\varepsilon', -\varepsilon''$, etc., la valeur de X devient égale à zéro, et que de même Y, Z, etc., s'évanouissent par cette hypothèse. L'équation (11) prouve aussi que K est la valeur que prend u par suite des mêmes substitutions.

En nommant *compensation des observations*, l'application des corrections $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$, etc., aux grandeurs directement observées, nous sommes conduit à une conséquence très-importante :

Les observations *compensées* comme nous l'avons indiqué, satisfont exactement à toutes les équations de condition, et font prendre à toute fonction des quantités observées la valeur qui résulterait de la combinaison la plus convenable des observations non modifiées; et puisque les équations de condition sont trop peu nombreuses pour qu'on puisse en déduire les valeurs exactes des erreurs, nous aurons au moins trouvé, par ce qui précède, les erreurs *les plus plausibles*. C'est sous ce nom que les quantités ε, ε', ε'', etc., seront désormais désignées.

10.

Le nombre des observations étant plus grand que celui des équations de condition, outre le système des corrections les plus plausibles, on peut en trouver un nombre infini qui rendent les équations de condition exactement satisfaites.

Il importe d'examiner les relations qui lient entre eux ces divers systèmes. Soit —E, —E′, — E″, etc., un pareil système de corrections, autre que le système le plus plausible; nous aurons

$$aE + a'E' + a''E'' + \ldots = \mathfrak{A},$$
$$bE + b'E' + b''E'' + \ldots = \mathfrak{B},$$
$$cE + c'E' + c''E'' + \ldots = \mathfrak{C},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multipliant ces équations par A, B, C, etc., et ajoutant, il vient, en ayant égard aux équations (10),

$$p\varepsilon E + p'\varepsilon'E' + p''\varepsilon''E'' + \ldots = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} + \ldots.$$

Mais les équations (13) combinées de la même manière donnent

$$(14)\, p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \ldots = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} + \ldots;$$

de la combinaison de ces résultats on déduit facilement

$$pE^2 + p'E'^2 + p''E''^2 + \ldots = p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \ldots$$
$$+ p(E - \varepsilon)^2 + p'(E' - \varepsilon')^2 + p''(E'' - \varepsilon'')^2 + \ldots,$$

et, par suite, la somme

$$pE^2 + p'E'^2 + p''E''^2 + \ldots$$

est, nécessairement, *plus grande* que

$$p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \ldots,$$

ce que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Théorème. — *Les carrés des corrections qui peuvent*

concilier les observations avec les équations de condition étant respectivement multipliés par les poids des observations correspondantes, donnent une somme minimum quand on adopte les corrections les plus plausibles.

On reconnaît précisément le principe des moindres carrés dont, au reste, les équations (12) et (10) peuvent facilement se déduire. La somme minimum, que nous désignerons désormais par S, est égale, d'après l'équation (14), à

$$\mathrm{A}\mathfrak{A} + \mathrm{B}\mathfrak{B} + \mathrm{C}\mathfrak{C} + \ldots.$$

11.

La détermination des erreurs les plus plausibles étant indépendante de l, l', l'', etc., fournit la préparation la plus commode, quel que soit l'usage que l'on veuille faire ultérieurement des observations. En outre, on voit sans peine que, pour atteindre ce but, il n'est pas nécessaire d'effectuer l'élimination *indéfinie*, c'est-à-dire de calculer $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta)$, etc., il suffit de déduire des équations (12), par une élimination *définie*, les quantités auxiliaires A, B, C, etc., que nous nommerons, dans ce qui va suivre, les corrélatifs des équations de condition

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = 0, \ldots;$$

ces quantités seront ensuite substituées dans l'équation (10).

Cette méthode ne laisse rien à désirer lorsqu'on demande seulement les valeurs les plus plausibles des quantités fournies par l'observation. Mais il en est autrement lorsqu'on désire, en outre, le poids de chacune des valeurs trouvées. Quelle que soit alors celle des quatre formules précédentes que l'on veuille employer, il est indispensable de connaître L, L', L'', etc., ou, ce qui revient au même, x^0, y^0, z^0, etc.; par cette raison, il sera utile d'étudier, de plus près, l'élimination qui fournit ces quantités et d'obtenir une méthode plus commode pour la détermination des poids

12.

Les relations qui lient les quantités dont nous nous occupons sont notablement simplifiées par la considération de la fonction indéfinie du second degré

$$(aa)x^2 + 2(ab)xy + 2(ac)xz + \ldots$$
$$+ (bb)y^2 + 2(bc)yz + \ldots + (cc)z^2 + \ldots,$$

que nous désignerons par T.

Cette fonction est évidemment égale à

$$(15) \quad \frac{(ax + by + cz + \ldots)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \ldots)^2}{p'} + \ldots$$

De plus, on a évidemment

$$(16) \qquad T = \xi x + \eta y + \zeta z + \ldots;$$

et si, enfin, on exprime x, y, z, etc., au moyen des équations (7), en fonction de ξ, η, ζ, etc., on aura

$$T = (\alpha\alpha)\xi^2 + 2(\alpha\beta)\xi\eta + 2(\alpha\gamma)\xi\zeta + \ldots + (\beta\beta)\eta^2$$
$$+ 2(\beta\gamma)\eta\zeta + \ldots + (\gamma\gamma)\zeta^2 + \ldots.$$

La théorie développée plus haut fournit deux systèmes de valeurs déterminées pour les quantités x, y, z, etc., ξ, η, ζ, etc. Le premier est

$$x = x^0, \quad y = y^0, \quad z = z^0, \ldots,$$
$$\xi = -(al), \quad \eta = -(bl), \quad \zeta = -(cl), \ \ldots;$$

à ce système correspond la valeur

$$T = (ll) - \frac{1}{P},$$

ainsi qu'on le voit en comparant à l'équation (16), la troisième forme du poids P, ou par la considération directe de la forme (4).

Le second système de valeurs est

$$x = A, \quad y = B, \quad z = C, \ldots,$$
$$\xi = \mathfrak{A}, \quad \eta = \mathfrak{B}, \quad \zeta = \mathfrak{C}, \ldots;$$

la valeur correspondante de T est

$$T = S,$$

comme cela est évident par les formules (10) et (15), et encore par les formules (14) et (16).

13.

Nous devons, avant tout, faire subir à la fonction T une transformation semblable à celle qui a été indiquée (*Theoria Motus*, art. 182), et, avec plus de développements, dans les *Recherches sur Pallas*.

Posons, à cet effet,

$$(bb, 1) = (bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)},$$
$$(bc, 1) = (bc) - \frac{(ab)(ac)}{(aa)},$$
$$(bd, 1) = (bd) - \frac{(ab)(ad)}{(aa)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(cc, 2) = (cc) - \frac{(ac)^2}{(aa)} - \frac{(bc, 1)^2}{(bb, 1)},$$
$$(cd, 2) = (cd) - \frac{(ac)(ad)}{(aa)} - \frac{(bc, 1)(bd, 1)}{(bb, 1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(dd, 3) = (dd) - \frac{(ad)^2}{(aa)} - \frac{(bd, 1)^2}{(bb, 1)} - \frac{(cd, 2)^2}{(cc, 2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et, ensuite (*),

$$(bb, 1)y + (bc, 1)z + (bd, 1)w + \ldots = \eta',$$
$$(cc, 2)z + (cd, 2)w + \ldots = \zeta'',$$
$$(dd, 3)w + \ldots = \varphi''',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on aura

$$T = \frac{\xi^2}{(aa)} + \frac{\eta'^2}{(bb, 1)} + \frac{\zeta''^2}{(cc, 2)} + \frac{\varphi'''^2}{(dd, 3)} + \ldots,$$

et η', ζ'', φ''', etc., se déduiront de ξ, η, ζ, φ, etc., par les

(*) Dans les calculs précédents il suffisait de trois lettres de chaque série pour faire apercevoir la loi des formules ; il a paru nécessaire d'en faire ici figurer une quatrième, pour rendre l'algorithme plus manifeste.

(*Note de* M. Gauss.)

équations suivantes :

$$\eta' = \eta - \frac{(ab)}{(aa)}\xi,$$

$$\zeta'' = \zeta - \frac{(ac)}{(aa)}\xi - \frac{(bc, 1)}{(bb, 1)}\eta',$$

$$\varphi''' = \varphi - \frac{(ad)}{(aa)}\xi - \frac{(bd, 1)}{(bb, 1)}\eta' - \frac{(cd, 2)}{(cc, 2)}\zeta'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et l'on en tirera facilement toutes les formules utiles à notre but. Ainsi, pour déterminer les corrélatifs A, B, C, etc., nous poserons

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{B}' &= \mathcal{B} - \frac{(ab)}{(aa)}\mathcal{A}, \\ \mathcal{C}'' &= \mathcal{C} - \frac{(ac)}{(aa)}\mathcal{A} - \frac{(bc, 1)}{(bb, 1)}\mathcal{B}', \\ \mathcal{D}''' &= \mathcal{D} - \frac{(ad)}{(aa)}\mathcal{A} - \frac{(bd, 1)}{(bb, 1)}\mathcal{B}' - \frac{(cd, 2)}{(cc, 2)}\mathcal{C}'', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

et enfin A, B, C, D, etc., s'obtiendront par les formules suivantes, en commençant par la dernière :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} (aa)\mathrm{A} + (ab)\mathrm{B} + (ac)\mathrm{C} + (ad)\mathrm{D} + \ldots &= \mathcal{A}, \\ (bb, 1)\mathrm{B} + (bc, 1)\mathrm{C} + (bd, 1)\mathrm{D} + \ldots &= \mathcal{B}', \\ (cc, 2)\mathrm{C} + (cd, 2)\mathrm{D} + \ldots &= \mathcal{C}'', \\ (dd, 3)\mathrm{D} + \ldots &= \mathcal{D}''', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Pour exprimer S, nous aurons la formule nouvelle

$$(20)\qquad \mathrm{S} = \frac{\mathcal{A}^2}{(aa)} + \frac{\mathcal{B}'^2}{(bb, 1)} + \frac{\mathcal{C}''^2}{(cc, 2)} + \frac{\mathcal{D}'''^2}{(dd, 3)} + \ldots;$$

enfin, le poids P, qu'il faut attribuer à la détermination la plus plausible de la quantité u, sera donné par la formule

$$(21)\qquad \frac{1}{\mathrm{P}} = (ll) - \frac{(al)^2}{(aa)} - \frac{(bl, 1)^2}{(bb, 1)} - \frac{(cl, 2)^2}{(cc, 2)} - \frac{(dl, 3)^2}{(dd, 3)} - \ldots;$$

dans cette formule, on fait

$$(22)\begin{cases}(bl, 1) = (bl) - \dfrac{(ab)(al)}{(aa)},\\ (cl, 2) = (cl) - \dfrac{(ac)(al)}{(aa)} - \dfrac{(bc, 1)(bl, 1)}{(bb, 1)},\\ (dl, 3) = (dl) - \dfrac{(ad)(al)}{(aa)} - \dfrac{(bd, 1)(bl, 1)}{(bb, 1)} - \dfrac{(cd, 2)(cl, 2)}{(cc, 2)}.\end{cases}$$

Les formules (17), ..., (21), dont la simplicité ne laisse rien à désirer, fournissent la solution complète de notre problème.

14.

Après avoir résolu le problème que nous avions en vue, nous allons aborder quelques questions secondaires qui éclaireront davantage l'ensemble de cette théorie.

Nous chercherons, en premier lieu, s'il peut arriver que l'élimination qui fournit x, y, z, etc., en fonction de ξ, η, ζ, etc., devienne, dans certains cas, impossible. Cela aurait évidemment lieu si les fonctions ξ, η, ζ, etc., n'étaient pas indépendantes les unes des autres. Supposons, pour un instant, qu'il en soit ainsi, et que l'une d'elles puisse s'exprimer en fonction des autres, de telle sorte que l'on ait la relation identique

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \ldots = 0,$$

α, β, γ, etc., désignant des nombres déterminés.

On aura alors

$$\begin{aligned}\alpha(aa) + \beta(ab) + \gamma(ac) + \ldots &= 0,\\ \alpha(ab) + \beta(bb) + \gamma(bc) + \ldots &= 0,\\ \alpha(ac) + \beta(bc) + \gamma(cc) + \ldots &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

et si nous posons

$$\begin{aligned}\alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots &= p\Theta,\\ \alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \ldots &= p'\Theta',\\ \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \ldots &= p''\Theta'',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

on en déduira

$$a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \ldots = 0,$$
$$b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \ldots = 0,$$
$$c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par suite,

$$p\Theta^2 + p'\Theta'^2 + p''\Theta''^2 + \ldots = 0;$$

p, p', p'', etc., étant, par leur nature, tous positifs, cette équation exige

$$\Theta = 0, \quad \Theta' = 0, \quad \Theta'' = 0, \ldots.$$

Si nous considérons les différentielles complètes dX, dY, dZ, etc., répondant aux valeurs de v, v', v'', etc., immédiatement fournies par les observations, ces différentielles

$$a\,dv + a'\,dv' + a''\,dv'' + \ldots,$$
$$b\,dv + b'\,dv' + b''\,dv'' + \ldots,$$
$$c\,dv + c'\,dv' + c''\,dv'' + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'après les résultats précédents, seront liées, les unes aux autres, de telle sorte qu'en les multipliant respectivement par α, β, γ, etc., la somme des produits sera identiquement nulle, en sorte que, parmi les équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \ldots,$$

il en est une au moins que l'on peut regarder comme *inutile*, car elle sera satisfaite dès que les autres le seront.

En examinant la question de plus près, on voit que cette conclusion n'est applicable qu'à des valeurs des variables infiniment peu différentes de celles que fournit l'observation. Il y a, en effet, deux cas à distinguer : le premier est celui où l'une des équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \ldots,$$

est renfermée dans les autres d'une manière générale et

absolue, et peut, par conséquent, être supprimée; le second est celui où, pour les valeurs particulières de ν, ν', ν'', etc., auxquelles se rapportent les observations, l'une des fonctions X, Y, Z, etc., X par exemple, acquiert une valeur maximum ou minimum, ou, plus généralement, une valeur dont la différentielle s'annule lorsque les autres équations restent satisfaites.

Mais comme nous ne considérons pour nos variables que des variations dont les carrés soient négligeables, ce second cas (qui dans les applications ne se présentera que bien rarement), pourra être assimilé au premier, et l'une des équations de condition pourra être supprimée comme surabondante.

Si les équations restantes sont indépendantes dans le sens que nous venons d'indiquer, on peut, d'après ce qui précède, être certain que l'élimination est possible. Nous nous réservons, du reste, de revenir sur cette matière qui mérite d'être examinée comme subtilité théorique plutôt que comme question d'une utilité pratique.

15.

Dans le premier Mémoire, art. 37 et suivants, nous avons montré le moyen de fixer, à posteriori, d'une manière très-approchée, le poids d'une détermination. Si les valeurs approchées de ϖ quantités sont fournies par des observations également précises, et qu'on les compare avec les valeurs qui résultent pour elles des hypothèses les plus plausibles qu'on puisse faire sur les ρ éléments dont elles dépendent, on a vu qu'il fallait ajouter les carrés des différences obtenues, diviser la somme par $\varpi - \rho$, et que le quotient pouvait être regardé comme une valeur approchée du carré de l'erreur moyenne inhérente à ce genre d'observations.

Si les observations sont inégalement précises, la seule modification que l'on doive apporter aux préceptes précédents, consiste en ce que l'on doit multiplier les carrés des

différences par les poids respectifs des observations correspondantes, et l'erreur moyenne obtenue de cette manière se rapporte aux observations dont le poids est pris pour unité.

Dans le cas actuel, la somme des carrés dont nous parlons se confond évidemment avec la somme S, et la différence $\varpi - \rho$ avec le nombre σ des équations de condition. Par suite, pour l'erreur moyenne des observations dont le poids est 1, nous aurons l'expression $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$, et la détermination sera d'autant plus digne de confiance que σ sera plus considérable.

Mais il est bon d'établir ce résultat, indépendamment des raisonnements du premier Mémoire; pour y parvenir, nous introduirons quelques notations nouvelles. Supposons qu'aux valeurs

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c, \ldots,$$

répondent

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \ldots,$$

de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned}
\alpha &= a(\alpha\alpha) + b(\alpha\beta) + c(\alpha\gamma) + \ldots,\\
\beta &= a(\alpha\beta) + b(\beta\beta) + c(\beta\gamma) + \ldots,\\
\gamma &= a(\alpha\gamma) + b(\beta\gamma) + c(\gamma\gamma) + \ldots;
\end{aligned}$$

et, en outre, qu'aux valeurs

$$\xi = a', \quad \eta = b', \quad \zeta = c', \ldots,$$

répondent

$$x = \alpha', \quad y = \beta', \quad z = \gamma', \ldots;$$

enfin, qu'aux valeurs

$$\xi = a'', \quad \eta = b'', \quad \zeta = c'', \ldots,$$

répondent

$$x = \alpha'', \quad y = \beta'', \quad z = \gamma'', \ldots,$$

et ainsi de suite.

La combinaison des équations (4) et (9) fournit

$$A = \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \ldots,$$
$$B = \beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \ldots,$$
$$C = \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \ldots,$$

et, comme on a

$$S = \mathfrak{A} A + \mathfrak{B} B + \mathfrak{C} C + \ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned} S = & (ae + a'e' + a''e'' + \ldots)(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \ldots) \\ & + (be + b'e' + b''e'' + \ldots)(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \ldots) \\ & + (ce + c'e' + c''e'' + \ldots)(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \ldots) + \ldots . \end{aligned}$$

16.

La série des observations qui fournissent les quantités v, v', v'', etc., affectées des erreurs fortuites e, e', e'', etc., peut être considérée comme une épreuve qui ne fait pas connaître, il est vrai, la grandeur de chaque erreur, mais qui, par le moyen des règles exposées plus haut, permet de déterminer la quantité S, fonction connue de toutes les erreurs. Dans une telle épreuve, les erreurs peuvent être les unes plus grandes, les autres plus petites; mais plus sera grand le nombre des erreurs employées, plus il y aura une grande probabilité que S diffère peu de sa valeur moyenne : la difficulté revient donc à trouver la moyenne de S.

Par les principes exposés dans le premier Mémoire et qu'il est inutile de reproduire ici, on trouve pour cette valeur moyenne

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots) m^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \ldots) m'^2 + \ldots .$$

En nommant μ l'erreur moyenne qui correspond aux observations dont le poids est 1, de telle sorte que l'on ait

$$\mu^2 = p m^2 = p' m'^2 = p'' m''^2 = \ldots,$$

l'expression précédente peut s'écrire comme il suit :

$$\left(\frac{a\alpha}{p}+\frac{a'\alpha'}{p'}+\frac{a''\alpha''}{p''}+\dots\right)\mu^2+\left(\frac{b\beta}{p}+\frac{b'\beta'}{p'}+\frac{b''\beta''}{p''}+\dots\right)\mu^2$$
$$+\left(\frac{c\gamma}{p}+\frac{c'\gamma'}{p'}+\frac{c''\gamma''}{p''}+\dots\right)\mu^2.$$

Mais on a trouvé

$$\frac{a\alpha}{p}+\frac{a'\alpha'}{p'}+\frac{a''\alpha''}{p''}+\dots=(aa)(\alpha\alpha)+(ab)(\alpha\beta)+(ac)(\alpha\gamma)+\dots;$$

or, le second membre est l'unité, comme on le reconnaît facilement par la comparaison des équations (6) et (7).

On trouvera de même

$$\frac{b\beta}{p}+\frac{b'\beta'}{p'}+\frac{b''\beta''}{p''}+\dots=1,$$
$$\frac{c\gamma}{p}+\frac{c'\gamma'}{p'}+\frac{c''\gamma''}{p''}+\dots=1,$$

et ainsi de suite.

D'après cela, la valeur moyenne de S devient $\sigma\mu^2$, et si l'on juge permis de regarder la valeur fortuite de S comme égale à la valeur moyenne, on en conclut

$$\mu=\sqrt{\frac{S}{\sigma}}.$$

17.

On peut apprécier la confiance que mérite cette détermination en calculant l'erreur moyenne à craindre, soit pour sa valeur propre, soit pour celle de son carré. La seconde sera la racine carrée de la valeur moyenne de l'expression

$$\left(\frac{S}{\sigma}-\mu^2\right)^2,$$

dont le développement s'obtiendra par des raisonnements semblables à ceux qui ont été exposés dans le premier Mémoire (art. 39 et suivants). Nous les supprimons pour abréger, en nous contentant d'indiquer le résultat.

L'erreur moyenne à craindre dans la détermination du carré μ^2 s'exprime par

$$\sqrt{\frac{2\mu^4}{\sigma}+\frac{\nu^4-3\mu^4}{\sigma^2}\,\mathrm{N}},$$

ν^4 étant la valeur moyenne des quatrièmes puissances des erreurs dont le poids est l'unité, et N la somme

$$(a\alpha+b\beta+c\gamma+\ldots)^2+(a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma'+\ldots)^2$$
$$+(a''\alpha''+b''\beta''+c''\gamma''+\ldots)^2+\ldots.$$

Cette somme ne peut pas, en général, se simplifier; mais, par un procédé analogue à celui dont on a fait usage au paragraphe 40 du premier Mémoire, on peut montrer que sa valeur est comprise entre ϖ et $\frac{\sigma^2}{\varpi}$. Dans l'hypothèse sur laquelle nous avions primitivement établi la méthode des moindres carrés, le terme qui contient cette somme disparaît à cause de

$$\nu^4=3\mu^4,$$

et la précision que l'on doit attribuer à la détermination

$$\mu=\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{\sigma}}$$

est par conséquent la même que si l'on avait opéré sur σ observations entachées d'erreurs exactement connues, conformément aux préceptes des art. 15 et 16 du premier Mémoire.

18.

Pour la compensation des observations, il y a, comme nous l'avons dit, deux opérations à exécuter : premièrement, il faut déterminer les corrélatifs des équations de condition, c'est-à-dire A, B, C, etc., qui satisfont aux équations (12); secondement, substituer ces quantités dans l'équation (10). La compensation ainsi obtenue peut être dite *parfaite* et *complète*, par opposition à la compensation *imparfaite* ou *incomplète*. Nous désignerons de cette der-

nière manière celles qui résultent des mêmes équations (10), dans lesquelles on substituera des valeurs de A, B, C qui ne satisferont pas aux équations (12), c'est-à-dire qui satisferont à quelques-unes seulement, ou à aucune. Nous ne nous occuperons pas ici d'un tel système de corrections, et nous ne leur accorderons même pas le nom de compensation.

Lorsque les équations (10) sont satisfaites, les systèmes (12) et (13) deviennent équivalents, et la différence dont nous parlons peut alors s'énoncer comme il suit : Les observations complétement compensées satisfont aux équations de condition

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \ldots ;$$

les observations incomplétement compensées ne satisfont qu'à une portion de ces équations, et peut-être à aucune; la compensation à la suite de laquelle toutes les équations sont satisfaites, est nécessairement complète.

19.

Il résulte de la définition même des compensations, que la réunion de deux systèmes de compensations peut en fournir un troisième, et l'on voit qu'il importe peu que les règles données pour obtenir une compensation parfaite soient appliquées aux observations primitives ou aux observations déjà imparfaitement compensées.

Soient $-\Theta$, $-\Theta'$, $-\Theta''$, etc., un système de compensations incomplètes, résultant des formules

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta p \;\;\;= A^{\circ} a \;+ B^{\circ} b \;+ C^{\circ} c \;+ \ldots, \\ \Theta' p' \;= A^{\circ} a' + B^{\circ} b' + C^{\circ} c' + \ldots, \\ \Theta'' p'' = A^{\circ} a'' + B^{\circ} b'' + C^{\circ} c'' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Les observations ainsi changées ne satisfaisant pas à toutes les équations de condition, soient $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{C}^*$, etc., les valeurs que prennent X, Y, Z, etc., quand on y substitue les valeurs ainsi obtenues pour v, v', v'', etc. On devra chercher les valeurs A^*, B^*, C^*, etc., satisfaisant aux équa-

tions

$$(\text{II})\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}^* &= A^*(aa) + B^*(ab) + C^*(ac) + \ldots, \\ \mathcal{B}^* &= A^*(ab) + B^*(bb) + C^*(bc) + \ldots, \\ \mathcal{C}^* &= A^*(ac) + B^*(bc) + C^*(cc) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et cela fait, la compensation complète des observations ainsi modifiées se fera par les nouveaux changements $-\varkappa$, $-\varkappa'$, $-\varkappa''$, etc.; $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$, etc., se déduisant des formules

$$(\text{III})\quad \left\{\begin{aligned} \varkappa p &= A^*a + B^*b + C^*c + \ldots, \\ \varkappa' p' &= A^*a' + B^*b' + C^*c' + \ldots, \\ \varkappa'' p'' &= A^*a'' + B^*b'' + C^*c'' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Cherchons comment ces corrections s'accordent avec la compensation complète des observations primitives. Il est clair d'abord que l'on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^* &= \mathcal{A} - a\Theta - a'\Theta' - a''\Theta'' - \ldots, \\ \mathcal{B}^* &= \mathcal{B} - b\Theta - b'\Theta' - b''\Theta'' - \ldots, \\ \mathcal{C}^* &= \mathcal{C} - c\Theta - c'\Theta' - c''\Theta'' - \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En substituant dans ces équations, pour Θ, Θ', Θ'', etc., leurs valeurs fournies par le système (I), pour $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{C}^*$, etc., celles que donne le système (II), il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (A^0 + A^*)(aa) + (B^0 + B^*)(ab) + \ldots, \\ \mathcal{B} &= (A^0 + A^*)(ab) + (B^0 + B^*)(bb) + \ldots, \\ \mathcal{C} &= (A^0 + A^*)(ac) + (B^0 + B^*)(bc) + \ldots; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et il suit de là que les corrélatifs des équations de condition (12) sont

$$A = A^0 + A^*, \quad B = B^0 + B^*, \quad C = C^0 + C^*, \ldots,$$

et alors les équations (10), (I) et (III) montrent que l'on a

$$\varepsilon = \Theta + \varkappa, \quad \varepsilon' = \Theta' + \varkappa', \quad \varepsilon'' = \Theta'' + \varkappa'', \ldots;$$

et, par suite, la compensation parfaite a la même valeur pour chaque inconnue, soit qu'on la calcule directement, soit qu'on l'obtienne médiatement en partant d'une compensation incomplète.

20.

Lorsque les équations de condition sont très-nombreuses, la détermination des quantités corrélatives A, B, C, etc., peut exiger des calculs tellement longs, que le calculateur en soit rebuté; il pourra être avantageux d'obtenir, dans ce cas, une compensation complète, à l'aide d'une série d'approximations reposant sur le théorème de l'article précédent. On partagera, pour cela, les équations de condition en deux ou plusieurs groupes, et l'on cherchera d'abord une compensation qui rende satisfaites les équations du premier groupe. On traitera ensuite les valeurs modifiées par ce premier calcul, et on les corrigera de nouveau en ayant égard seulement aux équations du second groupe. Ce second calcul donnera des résultats qui, en général, ne satisferont plus aux équations du premier groupe, et il faudra, si l'on n'a formé que deux groupes, revenir alors au premier et y satisfaire à l'aide de nouvelles corrections. Les observations seront ensuite soumises à une quatrième compensation, dans laquelle on n'aura égard qu'aux conditions du second groupe; et en opérant ainsi alternativement sur l'un et l'autre groupe d'équations, on formera des corrections qui seront nécessairement de plus en plus petites. Si le choix des groupes a été fait habilement, on arrivera bien vite à des valeurs que les corrections ultérieures ne changeront plus.

Quand on forme plus de deux groupes, on doit procéder de la même manière, les divers groupes étant employés successivement jusqu'au dernier, après quoi on revient au premier pour les reprendre dans le même ordre. Il nous suffit d'avoir indiqué ce procédé, dont la réussite dépendra beaucoup de l'habileté du calculateur.

21.

Il nous reste à donner la démonstration du lemme admis

dans l'art. 8. Adoptons, pour plus de clarté, des notations plus propres à mettre la démonstration en lumière.

Soient x^0, x', x'', etc., des indéterminées; supposons que les équations

$$\begin{aligned} n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + \ldots &= X^0, \\ n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + \ldots &= X', \\ n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + \ldots &= X'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

aient donné, par élimination, les suivantes :

$$\begin{aligned} N^{00}X^0 + N^{01}X' + N^{02}X'' + \ldots &= x^0, \\ N^{10}X^0 + N^{11}X' + N^{12}X'' + \ldots &= x', \\ N^{20}X^0 + N^{21}X' + N^{22}X'' + \ldots &= x'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En substituant, dans les deux premières équations du second système, les valeurs de X^0, X', X'', etc., fournies par le premier, nous obtiendrons deux équations identiques :

$$\begin{aligned} x^0 = {} & N^{00}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + \ldots) \\ & + N^{01}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + \ldots) \\ & + N^{02}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + \ldots) \\ & + N^{03}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + \ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' = {} & N^{10}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + \ldots) \\ & + N^{11}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + \ldots) \\ & + N^{12}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + \ldots) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ces équations étant identiques, on peut y substituer telles quantités que l'on voudra à la place de x^0, x', x'', etc. Faisons dans la première

$$x^0 = N^{10}, \quad x' = N^{11}, \quad x'' = N^{12}, \ldots,$$

et dans la seconde

$$x^0 = N^{00}, \quad x' = N^{01}, \quad x'' = N^{02}, \ldots.$$

En retranchant ensuite les deux identités membre à membre,

il viendra

$$\begin{aligned}
N^{10} - N^{01} = & (N^{00} N^{11} - N^{10} N^{01}) (n^{01} - n^{10}) \\
& + (N^{00} N^{12} - N^{10} N^{02}) (n^{02} - n^{20}) \\
& + (N^{00} N^{13} - N^{10} N^{03}) (n^{03} - n^{30}) \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + (N^{01} N^{12} - N^{11} N^{02}) (n^{12} - n^{21}) \\
& + (N^{01} N^{13} - N^{11} N^{03}) (n^{13} - n^{31}) \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + (N^{02} N^{13} - N^{12} N^{03}) (n^{23} - n^{32}) \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Ce que l'on peut écrire plus brièvement de la manière suivante :

$$N^{10} - N^{01} = \sum \left(N^{0\alpha} N^{1\beta} - N^{1\alpha} N^{0\beta}\right) \left(n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha}\right);$$

α, β désignant deux indices pris au hasard ; on conclut de là que les égalités

$$n^{01} = n^{10}, \quad n^{02} = n^{20}, .$$

et, généralement,

$$n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha}, \dots$$

entraînent nécessairement

$$N^{10} = N^{01};$$

et, comme l'ordre des indéterminées est arbitraire, il est évident que, dans la supposition admise, on aura généralement

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}.$$

22.

La méthode exposée dans ce Mémoire devant surtout s'appliquer utilement aux calculs de haute géodésie, le lecteur nous saura gré d'y joindre quelques exemples puisés dans cette partie de la science.

Les équations de condition qui existent entre les angles d'un système de triangles, peuvent, en général, se partager en trois catégories.

1. La somme des angles horizontaux, formés autour d'un

même sommet et embrassant la totalité de l'horizon, doit être égale à quatre droits.

II. La somme des angles de chaque triangle peut toujours être regardée comme connue; car, lors même que le triangle est situé sur une surface courbe, l'excès de la somme de ses angles sur deux droits peut être calculé avec une telle approximation, qu'il est permis de considérer le résultat comme absolument exact.

III. Enfin, on obtient un troisième genre de relations en examinant les rapports des côtés dans les triangles qui forment un réseau fermé. Si, en effet, les triangles sont tellement placés, que le second triangle ait un côté a commun avec le premier, et un côté b commun avec le troisième; si le quatrième triangle a deux côtés c et d respectivement communs avec le troisième et le cinquième, et ainsi de suite, jusqu'au dernier triangle, qui ait avec le précédent un côté commun k, et avec le premier de tous un côté commun l, les quotients

$$\frac{a}{l}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{d}{c}, \ldots, \quad \frac{l}{k},$$

pourront se calculer au moyen des angles qui leur sont opposés dans le triangle dont les deux côtés comparés font partie, et comme le produit de ces fractions est évidemment l'unité, on aura une relation entre les sinus des divers angles mesurés (diminués du tiers de l'excès sphérique ou sphéroïdique lorsqu'on opérera sur une surface courbe). Du reste, dans les réseaux un peu compliqués, il arrive souvent que les équations de la seconde et de la troisième catégorie rentrent en partie les unes dans les autres, et que, par suite, leur nombre doit être réduit. Au contraire, il pourra arriver, mais seulement dans des cas assez rares, que l'on adjoigne quelques équations nouvelles à celles de la seconde catégorie; c'est-ce qui aura lieu lorsque le réseau contiendra des polygones non divisées en triangles; on

pourra alors introduire des équations relatives aux figures qui ont plus de trois côtés. Dans une autre occasion, nous reviendrons avec plus de détails sur ces diverses circonstances, dont l'examen nous éloignerait en ce moment de notre but. Nous ne pouvons cependant nous dispenser de faire ici une remarque indispensable à ceux qui voudraient faire l'application rigoureuse de notre théorie : nous supposons toujours que les quantités désignées par v, v', v'', etc., ont été observées immédiatement, ou déduites d'observations telles, que leurs déterminations soient indépendantes les unes des autres, ou, au moins, puissent être regardées comme telles. Dans la pratique la plus ordinaire, on observe les angles que l'on peut regarder comme étant les éléments v, v', v'', etc., eux-mêmes. Mais on ne doit pas oublier que si le système contient, en outre, des triangles dont les angles n'aient pas été directement observés et aient été déduits de ceux que l'on connaissait, par des additions ou soustractions, ces angles ne devront pas être mis au nombre des grandeurs déterminées par l'observation, et l'on devra les faire entrer dans le calcul comme des fonctions des éléments qui ont servi à les former. Il en sera autrement si l'on adopte la méthode d'observations de M. Struve (*Astronomische Nachrichten*, II, page 431), qui consiste à déterminer toutes les directions autour d'un même sommet, en les rapportant toutes à une seule et même direction arbitraire. Les angles mesurés ainsi seront pris alors pour v, v', v'', etc., et les angles des triangles se présenteront tous comme des différences. Les équations de la première catégorie devront, dans ce cas, être supprimées comme superflues, car elles seront identiquement satisfaites. Le procédé que j'ai suivi moi-même dans les triangulations exécutées pendant ces dernières années, diffère des deux méthodes précédentes; on peut cependant l'assimiler, quant au résultat, avec le procédé de M. Struve, en ce sens que, dans chaque station, on doit regarder v, v', v'', etc., comme les angles formés

par les directions qui en partent, avec une même ligne arbitrairement choisie.

Nous donnerons deux exemples : le premier se rapporte au premier mode d'opération, et le second est relatif à des observations faites d'après la seconde méthode.

23.

Le premier exemple nous sera fourni par l'ouvrage de M. Krayenhof : *Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande.* Nous chercherons à *compenser* la partie des observations relatives au terrain compris entre Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde et Gröningen. Entre ces points, on a formé neuf triangles numérotés, dans l'ouvrage cité, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132. Les angles observés sont les suivants :

Triangle 121.

0. Harlingen........	50° 58′ 15″,238
1. Leeuwarden.... .	82.47.15,351
2. Ballum..........	46 14.27,202

Triangle 122.

3. Harlingen.........	51. 5.39,717
4. Sneek....	70.48.33,445
5. Leeuwarden.......	58. 5.48,707

Triangle 123.

6. Sneek.......... .	49 30.40,051
7. Drachten.........	42.52.59,382
8. Leeuwarden......	87.36.21,057

Triangle 124.

9 Sneek............	45.36. 7,492
10. Oldeholtpade.......	67.52. 0,048
11. Drachten...	66.31.56,513

TRIANGLE 125.

12.	Drachten.........	53° 55′ 24″,745
13.	Oldeholtpade......	47.48.52,580
14.	Oosterwolde......	78.15.42,347

TRIANGLE 127.

15.	Leeuwarden........	59.24. 0,645
16.	Dockum.........	76.34. 9,021
17.	Ballum..........	44. 1.51,040

TRIANGLE 128.

18.	Leeuwarden.......	72. 6.32,043
19.	Drachten	46.53.27,163
20.	Dockum..........	61. 0. 4,494

TRIANGLE 131.

21.	Dockum..........	57 1.55,292
22.	Drachten.........	83.33.14,515
23.	Groningen........	39.24.52,397

TRIANGLE 132.

24.	Oosterwolde......	81.54.17,447
25.	Groningen........	31.52.46,094
26.	Drachten.........	66.12.57,246

La considération de ces triangles montre que les vingt-sept angles, directement fournis par l'observation, ont entre eux treize relations nécessaires, savoir : deux de la première espèce, neuf de la seconde, et deux de la troisième. Mais il n'est pas utile d'écrire ici toutes ces équations sous leur forme finie, car pour le calcul nous avons besoin seulement des quantités, désignées dans la théorie générale, par $\mathfrak{A}$, a, a', a'',..., $\mathfrak{B}$, b, b', b'',..., c'est pourquoi nous écrirons immédiatement les équations (13), qui mettent ces quantités en évidence. Au lieu de ε, ε', ε'', etc., nous écrirons simplement ici (0), (1), (2), etc. De cette manière, aux deux équations du premier genre répondent les

suivantes :

$$(1)+(5)+(8)+(15)+(18)=-2'',197,$$
$$(7)+(11)+(12)+(19)+(22)+(26)=-0'',436.$$

Nous trouvons ensuite, pour les excès sphéroïdiques des neuf triangles : 1″,749; 1″,147; 1″,243; 1″,698; 0″,873; 1″,167; 1″,104; 2″,161; 1″,403. Nous aurons alors l'équation de condition du second genre :

$$v^{(0)}+v^{(1)}+v^{(2)}-180°.0'\,1'',749=0,$$

et ainsi des autres, et nous avons les neuf équations suivantes :

$$(0)+(1)+(2)=-3'',958,$$
$$(3)+(4)+(5)=+0,722,$$
$$(6)+(7)+(8)=-0,753,$$
$$(9)+(10)+(11)=+2,355,$$
$$(12)+(13)+(14)=-1,201,$$
$$(15)+(16)+(17)=-0,461,$$
$$(18)+(19)+(20)=+2,596,$$
$$(21)+(22)+(23)=+0,043,$$
$$(24)+(25)+(26)=-0,616.$$

Les équations de condition du troisième genre s'expriment plus facilement par le moyen des logarithmes : la première est

$$\begin{aligned}\log\sin(v^{0}-0'',583)-\log\sin(v^{2}-0'',583)-\log\sin(v^{3}-0'',382)\\+\log\sin(v^{4}-0'',382)-\log\sin(v^{6}-0'',414)\\+\log\sin(v^{7}-0'',414)-\log\sin(v^{16}-0'',389)\\+\log\sin(v^{17}-0'',389)-\log\sin(v^{19}-0'',368)\\+\log\sin(v^{20}-0'',368)=0.\end{aligned}$$

Il semble inutile de développer l'autre sous forme finie. A ces deux équations répondent les suivantes, dans lesquelles les coefficients se rapportent à la septième décimale des lo-

garithmes vulgaires (*) :

$$17{,}068(0) - 20{,}174(2) - 16{,}993(3) + 7{,}328(4) - 17{,}976(6) + 22{,}672(7) - 5{,}028(16) + 21{,}780(17) - 19{,}710(19) + 11{,}671(20) = -371,$$

$$17{,}976(6) - 0{,}880(8) - 20{,}617(9) + 8{,}564(10) - 19{,}082(13) + 4{,}375(14) + 6{,}798(18) - 11{,}671(20) + 13{,}657(21) - 25{,}620(23) - 2{,}995(24) + 33{,}854(25) = +370.$$

Aucune raison ne nous portant à attribuer des poids inégaux aux diverses observations, nous supposerons

$$p^0 = p^1 = p^2 = \ldots = 1.$$

En désignant les corrélatifs des équations de condition dans l'ordre même où ces équations ont été écrites, par

A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N,

nous les déterminerons par les équations suivantes :

$$-2'',197 = 5A + C + D + E + H + I + 5{,}917N,$$
$$-0{,}436 = 6B + E + F + G + I + K + L + 2{,}962M,$$
$$-3{,}958 = A + 3C - 3{,}106M,$$
$$+0{,}722 = A + 3D - 9{,}665M,$$
$$-0{,}753 = A + B + 3E + 4{,}696M + 17{,}096N,$$
$$+2{,}355 = B + 3F - 12{,}053N,$$
$$-1{,}201 = B + 3G - 14{,}707N,$$
$$-0{,}461 = A + 3H + 16{,}752M,$$
$$+2{,}596 = A + B + 3I - 8{,}039M - 4{,}874N,$$
$$+0{,}043 = B + 3K - 11{,}963N,$$
$$-0{,}616 = B + 3L + 30{,}859N,$$
$$-371 = 2{,}962B - 3{,}106C - 9{,}665D + 4{,}696E + 16{,}752H - 8{,}039I + 2902{,}27M - 459{,}33N,$$
$$+370 = 5{,}917A + 17{,}096E - 12{,}053F - 14{,}707G - 4{,}874I - 11{,}963K + 30{,}859L - 459{,}33M + 3385{,}96N$$

(*) Ces coefficients ont été tous multipliés, après la différentiation, par 10', et divisés par $206264{,}8 = \frac{180.60.60}{\pi}$, pour convertir les erreurs en secondes. J. B.

Nous en déduisons par l'élimination :

A = − 0,598	H = + 0,659
B = − 0,255	I = + 1,050
C = − 1,234	K = + 0,577
D = + 0,086	L = − 1,351
E = − 0,447	M = − 0,109792
F = + 1,351	N = + 0,119681.
G = + 0,271	

Les erreurs les plus plausibles sont enfin données par les formules

$$(0) = C + 17{,}068\ M$$
$$(1) = A + C$$
$$(2) = C - 20{,}174\ M$$
$$(3) = D - 16{,}993\ M,$$
. . . .

et nous obtenons les valeurs numériques suivantes, auxquelles nous adjoignons, pour qu'on fasse la comparaison, les corrections adoptées par M. Krayenhof :

	de Kr.		de Kr.
(0) = − 3″,108	− 2″,090	(14) = + 0″,795	+ 2″,400
(1) = − 1,832	+ 0,116	(15) = + 0,061	+ 1,273
(2) = + 0,981	− 1,982	(16) = + 1,211	+ 5,945
(3) = + 1,952	+ 1,722	(17) = − 1,732	− 7,674
(4) = − 0,719	+ 2,848	(18) = + 1,265	+ 1,876
(5) = − 0,512	− 3,848	(19) = + 2,959	+ 6,251
(6) = + 3,648	− 0,137	(20) = − 1,628	− 5,530
(7) = − 3,221	+ 1,000	(21) = + 2,211	+ 3,486
(8) = − 1,180	− 1,614	(22) = + 0,322	− 3,454
(9) = − 1,116	0	(23) = − 2,489	0
(10) = + 2,376	+ 5,928	(24) = − 1,709	+ 0,400
(11) = + 1,096	− 3,570	(25) = + 2,701	+ 2,054
(12) = + 0,016	+ 2,414	(26) = − 1,606	− 3,077
(13) = − 2,013	− 6,014		

La somme des carrés de nos corrections est 97,8845 ; l'erreur moyenne, telle que l'indiquent les 27 angles observés, est

par conséquent,

$$\sqrt{\frac{97,8845}{13}} = 2'',7440.$$

La somme des carrés des corrections de M. Krayenhof, est de 341,4201.

24.

Les triangles dont les sommets, dans la triangulation du Hanovre, ont été placés à Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode et Wilsede, nous fourniront un second exemple.

On a observé les directions suivantes :

A la station de FALKENBERG.

0. Wilsede........	187° 47′ 30″ 311
1. Wulfsode.......	225. 9 .39.676
2. Hauselberg......	266.13.56.239
3. Breithorn.......	274.14.43.634

A la station de BREITHORN.

4. Falkenberg......	94.33.40.755
5. Hauselberg......	122.51.23 054
6. Wilsede.........	150.18.35.100

A la station de HAUSELBERG.

7. Falkenberg......	86.29. 6.872
8. Wilsede........	154.37. 9 624
9. Wulfsode.......	189. 2.56.376
10. Breithorn	302.47.37.732

A la station de WULFSODE.

11. Hauselberg......	9. 5.36.593
12. Falkenberg......	45.27.33.556
13. Wilsede........	118.44.13.159

A la station de WILSEDE.

14. Falkenberg.. ...	7.51. 1.027
15. Wulfsode.......	298.29.49.519
16. Breithorn.......	330. 3. 7.392
17. Hauselberg.....	334.25.26.746

Ces observations permettent de former sept triangles.

TRIANGLE Ier.

Falkenberg	8° 0′ 47″,395
Breithorn........	28.17.42,299
Hauselberg.......	143.41.29,140

TRIANGLE II.

Falkenberg......	86.27.13,323
Breithorn........	55.44.54,345
Wilsede..........	37.47.53,635

TRIANGLE III.

Falkenberg.......	41. 4.16,563
Hauselberg.......	102.33.49,504
Wulfsode.........	36.21.56,963

TRIANGLE IV.

Falkenberg......	78.26 25,928
Hauselberg.......	68. 8. 2,752
Wilsede..........	35 25.34,281

TRIANGLE V.

Falkenberg.......	37.22. 9,365
Wulfsode	73.16.39,603
Wilsede	69.21.11,508

TRIANGLE VI.

Breithorn........	27.27.12,046
Hauselberg......	148.10,28,108
Wilsede..........	4.22.19,354

TRIANGLE VII.

Hauselberg.......	34.25.46,752
Wulfsode.	109.38.36,566
Wilsede.........	35.55.37,227

Nous avons ici sept équations de condition du second genre (il n'y a pas lieu évidemment d'en former du premier genre); pour les former, nous devons chercher, avant tout,

les excès sphéroïdiques des sept triangles, et pour cela il est indispensable de connaître la longueur d'un côté. Celui qui réunit Wilsede à Wulfsode est $22877^m,94$. On en conclut, pour les excès sphéroïdiques des divers triangles : I...0″,202; II...2″,442; III...1″,257; IV...1″,919; V...1″,957; VI...0″,321; VII...1″,295.

Si l'on désigne par $\nu^{(0)}$, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$, $\nu^{(3)}$, etc., les angles qui déterminent les directions indiquées plus haut, et marquées des mêmes indices, les angles du premier triangle seront

$$\nu^{(3)} - \nu^{(2)},\ \nu^{(5)} - \nu^{(4)},\ 360 + \nu^{(7)} - \nu^{(10)},$$

et la première équation de condition est par conséquent

$$- \nu^{(2)} + \nu^{(3)} - \nu^{(4)} + \nu^{(5)} + \nu^{(7)} - \nu^{(10)} + 179^\circ 59' 59'',798 = 0.$$

Les six triangles restants fourniront six équations analogues, mais un peu d'attention montrera que ces équations ne sont pas indépendantes; la seconde est en effet identique avec la somme de la première, de la quatrième et de la sixième; la somme de la troisième et de la cinquième est identique avec celle de la quatrième et de la septième : c'est pourquoi nous négligerons la seconde et la cinquième. Au lieu des équations restantes sous forme finie, nous écrirons ici les équations correspondantes (13), en subsituant aux notations ε, ε', ε'', etc., (0), (1), (2), etc. :

$$\begin{aligned}
-1'',368 &= -(2)+(3)-(4)+(5)+(7)-(10),\\
+1,773 &= -(1)+(2)-(7)+(9)-(11)+(12),\\
+1,042 &= -(0)+(2)-(7)+(8)+(14)-(17),\\
-0,813 &= -(5)+(6)-(8)+(10)-(16)+(17),\\
-0,750 &= -(8)+(9)-(11)+(13)-(15)+(17).
\end{aligned}$$

On peut obtenir, au moyen des triangles du système, huit équations du troisième genre, et pour cela il est permis de combiner trois des quatre triangles I, II, IV, VI, ou des triangles III, IV, V, VII; cependant un peu d'attention

montre qu'il suffit d'en considérer deux appartenant respectivement aux deux systèmes de triangles et que celles-là comprendront toutes les autres.

Nous aurons ainsi, pour sixième et septième équation de condition,

$$\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(3)}-v^{(2)}-0'',067)-\log\sin(v^{(5)}-v^{(4)}-0'',067)\\
+&\log\sin(v^{(14)}-v^{(17)}-0'',640)-\log\sin(v^{(2)}-v^{(0)}-0'',640)\\
+&\log\sin(v^{(6)}-v^{(5)}-0'',107)-\log\sin(v^{(17)}-v^{(16)}-0'',107)=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(2)}-v^{(1)}-0'',419)-\log\sin(v^{(12)}-v^{(11)}-0'',419)\\
+&\log\sin(v^{(14)}-v^{(17)}-0'',640)-\log\sin(v^{(2)}-v^{(0)}-0'',640)\\
+&\log\sin(v^{(13)}-v^{(11)}-0'',432)-\log\sin(v^{(17)}-v^{(15)}-0'',432)=0,
\end{aligned}$$

auxquelles répondent les équations

$$\begin{aligned}
+25 = &+4,31\,(0)-153,88\,(2)+149,57\,(3)\\
&+39,11\,(4)-79,64\,(5)+40,53\,(6)\\
&+31,90\,(14)+275,39\,(16)-307,29\,(17),\\
-3 = &+4,31\,(0)-24,16\,(1)+19,85\,(2)\\
&+36,11\,(11)-28,59\,(12)-7,52\,(13)\\
&+31,90\,(14)+29,06\,(15)-60,96\,(17).
\end{aligned}$$

Si nous attribuons la même certitude aux diverses directions, en supposant $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}\ldots=1$, les corrélatifs des sept équations de condition étant désignés par A, B, C, D, E, F, G, leur détermination dépendra des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
-1,368 &= +6A-2B-2C-2D+184,72F-19,85G,\\
+1,773 &= -2A+6B+2C+2E-153,88F-20,69G,\\
+1,042 &= -2A+2B+6C-2D-2E+181,00F\\
&\quad +108,40G,\\
-0,813 &= -2A-2C+6D+2E-462,51F-60,96G,\\
-0,750 &= +2B-2C+2D+6E-307,29F-133,65G\\
+25 &= 184,72A-153,88B+181,00C-462,51D\\
&\quad -307,29E+224868F+16694,1G,\\
-3 &= -19,85A-20,69B+108,40C-60,96D\\
&\quad -133,65E+16694,1F+8752,39G.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons, par élimination,

$$A = -\ 0{,}225,$$
$$B = +\ 0{,}344,$$
$$C = -\ 0{,}088,$$
$$D = -\ 0{,}171,$$
$$E = -\ 0{,}323,$$
$$F = +\ 0{,}0002\,15915,$$
$$G = -\ 0{,}0054\,74620,$$

et les erreurs les plus probables sont données par les formules

$$(0) = -\,C + 4{,}31\,F + 4{,}31\,G,$$
$$(1) = -\,B - 24{,}16\,G,$$
$$(2) = -\,A + B + C - 153{,}88\,F + 19{,}85\,G,$$
....

d'où l'on déduit les valeurs numériques suivantes :

$(0) = +\ 0'',065$	$(9) = +\ 0'',021$
$(1) = -\ 0,212$	$(10) = +\ 0,054$
$(2) = +\ 0,339$	$(11) = -\ 0,219$
$(3) = -\ 0,193$	$(12) = +\ 0,501$
$(4) = +\ 0,233$	$(13) = -\ 0,282$
$(5) = -\ 0,071$	$(14) = -\ 0,256$
$(6) = -\ 0,162$	$(15) = +\ 0,164$
$(7) = -\ 0,481$	$(16) = +\ 0,230$
$(8) = +\ 0,406$	$(17) = -\ 0,139.$

La somme des carrés de ces erreurs est égale à 1,2288; l'erreur moyenne résultant des 18 directions observées est, par conséquent,

$$\sqrt{\frac{1{,}2288}{7}} = 0'',4190.$$

25.

Afin de donner un exemple de la dernière partie de notre théorie, cherchons dans quelle précision les observations compensées déterminent le côté Falkenberg-Breithorn,

au moyen du côté Wilsede-Wulfsode. La fonction u, par laquelle il est exprimé, est, dans ce cas,

$$u = 22877^m,94 \times \frac{\sin(v^{(13)} - v^{(12)} - 0'',652).\sin(v^{(14)} - v^{(16)} - 0'',814)}{\sin(v^{(1)} - v^{(0)} - 0'',652).\sin(v^{(6)} - v^{(4)} - 0'',814)};$$

sa valeur déduite des observations corrigées est

$$26766^m,68.$$

La différentiation de cette équation fournit, en exprimant $dv^{(0)}$, $dv^{(1)}$, etc., en secondes,

$$du = [0^m,16991\,(dv^{(0)}) - dv^{(1)}] + 0^m,08836\,(dv^{(4)} - dv^{(6)})$$
$$- [0^m,03899\,(dv^{(12)}) - dv^{(13)}] + 0^m,16731\,(dv^{(14)} - dv^{(16)});$$

on déduit de là :

$$(al) = -\ 0,08836,$$
$$(bl) = +\ 0,13092,$$
$$(cl) = -\ 0,00260,$$
$$(dl) = +\ 0,07895,$$
$$(el) = +\ 0,03899,$$
$$(fl) = -\ 40,1315,$$
$$(gl) = +\ 10,9957,$$
$$(ll) = +\ 0,13238,$$

Les méthodes indiquées plus haut donnent, en prenant le mètre pour unité de longueur,

$$\frac{1}{P} = 0,08329 \quad \text{ou} \quad P = 12,006.$$

On en conclut que l'erreur moyenne à craindre dans la valeur du côté Falkenberg-Breithorn est $0^m,2886\,m$ (m désignant l'erreur moyenne à craindre dans les directions observées, cette erreur étant exprimée en secondes), et, par conséquent, si nous adoptons la valeur de m annoncée plus haut, cette erreur moyenne à craindre est $0^m,1209$.

Au reste, l'inspection du système de triangles montre immédiatement qu'on pouvait complétement laisser de côté la station Hauselberg, sans rompre le réseau qui réunit les



quatre autres. Mais il ne serait pas permis pour cela de supprimer les opérations qui se rapportent à ce point, car elles contribuent certainement à augmenter la précision de l'ensemble. Pour montrer plus clairement quel accroissement de précision en résulte, nous terminerons en faisant de nouveau le calcul, après avoir exclu tous les résultats qui se rapportent au point Hauselberg. Des dix-huit directions mentionnées plus haut, huit cessent alors de servir, et les erreurs les plus plausibles sur celles qui restent, sont

$(0) = +0'',327$	$(12) = +0'',206$
$(1) = -0,206$	$(13) = -0,206$
$(3) = -0,121$	$(14) = +0,327$
$(4) = +0,121$	$(15) = +0,206$
$(6) = -0,121$	$(16) = +0,121$

La valeur du côté Falkenberg-Breithorn devient alors $26766^m,63$, résultat peu différent de celui qui a été obtenu plus haut. Mais le calcul du poids donne

$$\frac{1}{P} = 0,13082 \quad \text{ou} \quad P = 7,644,$$

et l'erreur moyenne à craindre est, en mètres,

$$0,36169\,m = 0^m,1515.$$

On voit que par l'adjonction des opérations qui se rapportent à Hauselberg, le poids de la détermination du côté Falkenberg-Breithorn est augmenté dans le rapport de 7,644 à 12,006, c'est-à-dire dans le rapport de l'unité à 1,571.

NOTES.

NOTE I.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

(Extrait du *Theoria Motus Corporum cœlestium.*)

1.

..... Abordons maintenant une recherche beaucoup plus générale et des plus fécondes dans toute application du calcul aux phénomènes naturels. Soient V, V′, V″, etc., μ fonctions des ν inconnues p, q, r, s, etc., et supposons que des observations directes aient donné, pour ces fonctions, les valeurs

$$V = M, \quad V' = M', \quad V'' = M'', \ldots.$$

En général, le calcul de ces inconnues constituera un problème indéterminé, déterminé ou plus que déterminé, suivant que l'on aura

$$\mu < \nu, \quad \mu = \nu, \quad \text{ou} \quad \mu > \nu \ (*).$$

Nous ne nous occuperons ici que du dernier cas, dans lequel évidemment il ne serait possible d'obtenir une représentation exacte de toutes les observations, que si ces observa-

(*) Si, dans ce troisième cas, $\mu + 1 - \nu$ des fonctions V, V′, V″, etc., pouvaient être regardées comme des fonctions de toutes les autres, le problème deviendrait plus que déterminé relativement à ces fonctions, mais indéterminé relativement à p, q, r, s, etc. On ne pourrait pas en déduire les valeurs de ces dernières, même si les valeurs des fonctions V, V′, V″, etc., étaient d'une exactitude absolue : mais nous excluons ce cas particulier de nos recherches.

tions n'étaient affectées d'aucune erreur. Mais comme cela n'a jamais lieu dans la nature, on devra regarder comme possible tout système de valeurs des inconnues p, q, r, s, etc., desquelles résultent, pour les fonctions $V - M$, $V' - M'$, $V'' - M''$, des valeurs qui ne surpassent pas les limites des erreurs que l'on peut commettre dans les observations, mais on ne doit pas regarder tous ces systèmes possibles comme jouissant du même degré de probabilité.

Supposons d'abord, dans toutes les observations, un état de choses tel, qu'il n'y ait pas lieu de regarder l'une d'elles comme plus exacte qu'une autre, c'est-à-dire, que l'on doive regarder des erreurs égales dans chacune d'elles comme également probables. La probabilité qu'une erreur Δ soit commise dans l'une des observations sera une fonction de Δ, que nous nommerons $\varphi(\Delta)$. Quoique cette fonction ne puisse être assignée d'une manière précise, on peut du moins affirmer qu'elle doit devenir maximum pour $\Delta = 0$, avoir dans la plupart des cas la même valeur pour des valeurs de Δ égales et de signes contraires, et, enfin, s'évanouir quand on donne à Δ une valeur égale ou supérieure à l'erreur maximum; $\varphi(\Delta)$ doit donc, à proprement parler, être rapportée à la classe des fonctions discontinues, et, si nous nous permettons, pour la facilité du calcul, d'y substituer une fonction analytique, il faudra que cette dernière soit choisie de telle sorte qu'elle tende rapidement vers o à partir de deux valeurs de Δ, l'une supérieure, l'autre inférieure à o, et qu'en dehors de ces deux limites on puisse la considérer comme nulle. Or la probabilité que l'erreur soit comprise entre Δ et une quantité $\Delta + d\Delta$ qui en diffère infiniment peu, sera exprimée par $\varphi(\Delta) . d\Delta$, et, par suite, la probabilité que l'erreur est comprise entre D et D', par

$$\int_{D}^{D'} \varphi(\Delta)\, d\Delta.$$

Cette intégrale, prise depuis la plus grande valeur néga-



tive de Δ jusqu'à sa plus grande valeur positive, ou plus généralement depuis $\Delta = -\infty$ jusqu'à $\Delta = \infty$, devra nécessairement être égale à 1. On aura donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1.$$

Supposons donc qu'on ait un système déterminé de valeurs des quantités p, q, r, s, etc. : la probabilité que l'observation donnera pour V la valeur M, sera exprimée par $\varphi(M - V)$, après qu'on aura substitué dans V les valeurs de p, q, r, s, etc.; de même $\varphi(M' - V')$, $\varphi(M'' - V'')$, etc., exprimeront les probabilités pour que les observations donnent aux fonctions V', V'', etc., les valeurs M', M'', etc. C'est pourquoi, tant qu'on pourra considérer toutes les observations comme des événements indépendants les uns des autres, le produit

$$\varphi(M - V)\, \varphi(M' - V')\, \varphi(M'' - V'') \ldots = \Omega,$$

exprimera la probabilité que toutes ces valeurs résulteront en même temps des observations.

2.

De même qu'en se donnant des valeurs quelconques des inconnues, il en résulte, avant toute observation, une probabilité déterminée pour un système de valeurs des fonction V, V', V'', etc., de même, après que l'observation aura donné pour ces fonctions des valeurs déterminées, il en résultera pour chaque système de valeurs des inconnues qui en découleront, une probabilité déterminée : car il est clair qu'on devra considérer comme les plus probables les systèmes qui donnent à l'événement observé la plus grande probabilité. L'appréciation de cette probabilité peut s'obtenir par le théorème suivant :

Si, en adoptant une certaine hypothèse H, *la probabilité d'un événement déterminé* E *est* h, *mais qu'en adoptant une autre hypothèse* H', *exclusive de la première et ayant*

à priori la même probabilité, la probabilité du même événement soit h' : je dis que lorsque l'événement E *aura eu lieu, la probabilité que* H *soit la vraie hypothèse sera à la probabilité que* H' *soit la vraie hypothèse comme h est à h'.*

Pour le démontrer et afin de distinguer toutes les circonstances d'où peut dépendre, soit que l'hypothèse H ou H', ou toute autre ait lieu, l'arrivée d'un événement E ou d'un autre événement, formons un système des cas différents qui peuvent se présenter et que nous regarderons comme également probables à priori (c'est-à-dire tant qu'il y a doute si c'est l'événement E ou un autre qui aura lieu). Ces cas peuvent être ainsi distribués :

NOMBRE DES CAS.	HYPOTHÈSE propre à ces cas.	ÉVÉNEMENT qui doit en résulter.
m	H	E
n	H	Différent de E
m'	H'	E
n'	H'	Différent de E
m''	Différente de H et de H'	E
n''	Différente de H et de H'	Différent de E

On aura d'après cela

$$h = \frac{m}{m+n}, \quad h' = \frac{m'}{m'+n'}.$$

Or, avant l'arrivée de l'événement, la probabilité de l'hypothèse H était

$$\frac{m+n}{m+n+m'+n'+m''+n''}.$$

Après l'événement qui exclut $n+n'+n''$ cas, parmi ceux qui sont possibles, cette probabilité sera

$$\frac{m}{m+m'+m''}.$$

De même les probabilités de l'hypothèse H′ avant et après l'événement sont respectivement

$$\frac{m' + n'}{m + n + m' + n' + m'' + n''} \quad \text{et} \quad \frac{m'}{m + m' + m''};$$

mais, comme on a supposé que les hypothèses H et H′ avaient avant l'événement la même probabilité, on aura

$$m + n = m' + n',$$

d'où résulte immédiatement la vérité du théorème.

Si maintenant on suppose qu'on n'a, pour déterminer les inconnues, que les observations

$$V = M, \quad V' = M', \quad V'' = M'', \ldots,$$

et que tous les systèmes de valeurs des inconnues étaient également probables avant ces observations, il est visible que la probabilité d'un certain système, après ces observations, sera proportionnelle à Ω. C'est-à-dire que $\lambda \Omega \, dp dq dr \ldots$ exprimera la probabilité que les valeurs des inconnues soient respectivement comprises dans les limites infiniment voisines p et $p + dp$, q et $q + dq$, r et $r + dr, \ldots$, λ représentant une quantité indépendante de p, q, r, s, etc.; et l'on aura évidemment

$$\frac{1}{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \Omega \, dp \, dq \, dr \ldots .$$

3.

De là résulte naturellement que le système le plus probable des valeurs de p, q, r, etc., correspondra au maximum de Ω, et se tirera des ν équations

$$\frac{d\Omega}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dq} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dr} = 0, \ldots;$$

si l'on pose

$$V - M = v, \; V' - M' = v', \; V'' - M'' = v'', \ldots \quad \text{et} \quad \frac{d.\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta).d\Delta} = \varphi'(\Delta),$$

ces équations prendront la forme suivante :

$$\frac{dv}{dp}\varphi'(v)+\frac{dv'}{dp}\varphi'(v')+\frac{dv''}{dp}\varphi'(v'')+\ldots=0,$$

$$\frac{dv}{dq}\varphi'(v)+\frac{dv'}{dq}\varphi'(v')+\frac{dv''}{dq}\varphi'(v'')+\ldots=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De là résulte qu'on pourra obtenir par l'élimination une solution pleinement déterminée du problème, dès que la nature de la fonction φ' sera connue. Mais comme cette fonction ne peut être définie à priori, abordons la question à un autre point de vue et cherchons une fonction acceptée tacitement comme base, en vertu d'un principe simple et généralement admis. Or on a coutume de regarder comme un axiome l'hypothèse que si une quantité a été obtenue par plusieurs observations immédiates, faites avec le même soin dans des circonstances semblables, la moyenne arithmétique des valeurs observées sera la valeur la plus probable de cette quantité, sinon en toute rigueur, du moins avec une grande approximation, de telle sorte que le plus sûr soit toujours de s'y arrêter. Si donc l'on pose

$$V=V'=V''\ldots=p,$$

et

$$p=\frac{M+M'+M''+\ldots}{\mu},$$

on devra avoir en général

$$\varphi'(M-p)+\varphi'(M'-p)+\varphi'(M''-p)+\ldots=0$$

pour toute valeur entière et positive de μ. Faisant ensuite

$$M'=M''\ldots=M-\mu N,$$

on aura généralement

$$\varphi'[(\mu-1)N]=(1-\mu)\varphi'(-N),$$

d'où l'on tire facilement que $\frac{\varphi'(\Delta)}{\Delta}$ doit être en général une constante k. On aura donc

$$\log \varphi(\Delta) = \tfrac{1}{2} k \Delta^2 + \text{const.} = \tfrac{1}{2} k \Delta^2 + \log \varkappa,$$

d'où

$$\varphi(\Delta) = \varkappa e^{\frac{1}{2} k \Delta^2}.$$

Or on voit facilement que la constante k doit être négative, pour que Ω puisse devenir maximum : posons donc

$$\frac{1}{2} k = -h^2,$$

et comme, d'après un élégant théorème de Laplace, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

notre fonction deviendra

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}.$$

4.

La fonction que nous venons de trouver ne peut pas exprimer, en toute rigueur, la probabilité des erreurs, puisque les erreurs possibles étant toujours renfermées entre certaines limites, la probabilité d'erreurs plus grandes devrait être toujours nulle, tandis que notre fonction a toujours une valeur finie. Cependant ce défaut, que présenterait également toute autre fonction analytique, n'a aucune importance dans les applications, parce que la valeur de notre fonction décroît si rapidement, pour peu que $h\Delta$ ait une valeur considérable, qu'on peut, en toute sûreté, la regarder alors comme équivalente à o. D'ailleurs, la nature de la question ne permettra jamais d'assigner les limites des erreurs avec une rigueur absolue.

Au reste, la constante h peut être regardée comme ser-

vant de mesure à la précision des observations. Si en effet la probabilité de l'erreur Δ dans un système d'observations est exprimée par

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2},$$

et dans un autre système d'observations plus ou moins exactes que les premières par

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 \Delta^2},$$

la probabilité que dans une observation du premier système l'erreur soit comprise entre les limites $-\delta$ et $+\delta$, sera exprimée par

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta,$$

et de même la probabilité que l'erreur d'une observation du second système soit comprise entre les limites $-\delta'$ et $+\delta'$, sera exprimée par

$$\int_{-\delta'}^{\delta'} \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2 \Delta^2} d\Delta :$$

or ces intégrales sont manifestement égales lorsqu'on a

$$h\delta = h'\delta'.$$

Si, par exemple, on a

$$h' = 2h,$$

une erreur double dans le premier système sera commise aussi facilement qu'une erreur simple dans le second, de sorte que les dernières observations, pour nous servir d'une expression consacrée par l'usage, jouissent d'un degré de précision deux fois plus grand.

5.

Voici maintenant quelques conséquences de cette loi. Il

est clair qu'il faut, pour que le produit

$$\Omega = h^{\mu}\,\pi^{-\frac{1}{2}\mu}\,e^{-h^2(v^2+v'^2+v''^2+\ldots)}$$

devienne maximum, que la somme

$$v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots$$

devienne minimum. Donc le système de valeurs des inconnues p, q, r, s, etc., le plus probable correspond au cas où les carrés des différences entre les valeurs observées et les valeurs calculées des fonctions V, V′, V″, etc., donnent la somme la plus petite possible, pourvu que toutes les observations soient également présumées précises.

Ce principe, qui est de la plus grande utilité dans toutes les applications des mathématiques à la philosophie naturelle, doit être regardé comme un axiome, au même titre que le principe qui nous fait adopter la moyenne arithmétique des valeurs observées d'une même quantité comme la valeur la plus probable de cette quantité.

Le principe s'étend sans peine au cas d'observations d'une précision *inégale*. Car si les précisions des observations par lesquelles on a trouvé

$$V = M, \quad V' = M', \quad V'' = M'', \ldots,$$

sont représentées respectivement par h, h', h'', etc., c'est-à-dire si l'on suppose que des erreurs réciproquement proportionnelles à ces quantités puissent être commises avec la même facilité, il est clair que cela revient au même que si, par des observations d'une égale précision (représentée par 1), les valeurs des fonctions hV, $h'V'$, $h''V''$, etc., avaient été trouvées égales à hM, $h'M'$, $h''M''$, etc.; c'est pourquoi le système le plus probable de valeurs des quantités p, q, r, s, etc., sera celui où la somme

$$h^2v^2 + h'^2v'^2 + h''^2v''^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire où la somme des carrés des différences entre



les valeurs observées et calculées, multipliés respectivement par les carrés des nombres qui expriment le degré de précision, devient un minimum. Par là, il n'est pas même nécessaire que les fonctions V, V′, V″, etc., se rapportent à des quantités homogènes, mais elles pourront représenter des quantités hétérogènes (par exemple des secondes d'arcs et de temps); pourvu que l'on puisse estimer le rapport des erreurs qui, dans chacune de ces grandeurs, peuvent être commises avec la même facilité.

6.

Le principe exposé dans l'article précédent se recommande aussi par cela qu'il réduit le calcul numérique des inconnues à un algorithme très-expéditif, quand les fonctions V, V′, V″, etc., sont linéaires. Supposons

$$V - M = v = -m + ap + bq + cr + ds + \ldots,$$
$$V' - M' = v' = -m' + a'p + b'q + c'r + d's + \ldots,$$
$$V'' - M'' = v'' = -m'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Posons

$$av + a'v' + a''v'' + \ldots = P,$$
$$bv + b'v' + b''v'' + \ldots = Q,$$
$$cv + c'v' + c''v'' + \ldots = R,$$
$$dv + d'v' + d''v'' + \ldots = S,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

alors les ν équations de l'art. 3, qui déterminent les valeurs des inconnues, seront

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0, \ldots,$$

si nous supposons les observations également bonnes, cas auquel nous pouvons ramener tous les autres, comme nous l'avons montré dans l'article précédent. On a ainsi autant d'équations linéaires que d'inconnues : on les résoudra par la méthode ordinaire.

Voyons maintenant si cette élimination est toujours possible ou si elle peut donner une valeur indéterminée ou impossible. Il résulte de la théorie de l'élimination que le second ou le troisième cas aura lieu si, en laissant de côté une des équations

$$P = o, \quad Q = o, \quad R = o, \ldots,$$

on peut déduire des équations conservées une équation identique ou contradictoire à celle que l'on a omise, ou, ce qui revient au même, si l'on peut assigner une fonction linéaire

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R + \ldots,$$

qui soit identiquement nulle ou qui ne contienne aucune des inconnues. Supposons donc que l'on ait

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R + \ldots = \varkappa,$$

on a l'équation identique

$$(v + m) v + (v' + m') v' + (v'' + m'') v'' + \ldots$$
$$= pP + qQ + rR + sS + \ldots.$$

Si l'on suppose qu'en faisant

$$p = \alpha x, \quad q = \beta x, \quad r = \gamma x, \ldots,$$

les fonctions v, v', v'', etc., deviennent respectivement

$$-m + \lambda x, \quad -m' + \lambda' x, \quad -m'' + \lambda'' x, \ldots,$$

on aura l'équation identique

$$(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \ldots) x^2 - (\lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' + \ldots) x = \varkappa x,$$

et, par suite,

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \ldots = o, \quad \varkappa + \lambda m + \lambda' m' + \lambda'' m'' + \ldots = o,$$

d'où résulte

$$\lambda = o, \quad \lambda' = o, \quad \lambda'' = o, \ldots,$$

et, par suite,

$$\varkappa = o;$$

c'est-à-dire que les fonctions V, V', V'', etc., devraient ne pas changer si p, q, r, s, etc., reçoivent des accroissements quelconques proportionnels aux nombres α, β, γ, δ, etc. Un pareil cas, dans lequel la détermination des inconnues ne serait pas possible, même si l'on donnait les vraies valeurs des fonctions, n'appartient pas à notre sujet, comme nous en avons averti plus haut.

Au reste, on peut réduire facilement tous les cas à celui où les fonctions V, V', V'', etc., sont linéaires. Désignons par π, χ, ρ, σ, etc., des valeurs approchées des inconnues p, q, r, s, etc. (que nous obtiendrons en faisant usage de ν équations prises parmi les μ équations

$$V = M, \quad V' = M', \quad V'' = M'', \ldots),$$

et posons

$$p = \pi + p', \quad q = \chi + q', \quad r = \rho + r', \quad s = \sigma + s', \quad \ldots;$$

il est clair que ces nouvelles inconnues seront si petites, que leurs carrés et leurs produits seront négligeables, et que les équations deviendront linéaires par suite des substitutions indiquées. Que si, à la fin du calcul, on trouve contre toute attente que les valeurs de p', q', r', s', etc., qu'on en tire soient trop considérables, et qu'il paraisse peu sûr de négliger leurs carrés et leurs produits, on remédiera à cet inconvénient en répétant la même opération (mais en prenant pour π, χ, ρ, σ, etc., les valeurs corrigées de p, q, r, s, etc.).

7.

Tant qu'on n'a qu'une seule inconnue p, pour la détermination de laquelle on a trouvé que les fonctions

$$ap + n, \quad a'p + n', \quad a''p + n'', \ldots,$$

prenaient respectivement les valeurs

$$M, \quad M', \quad M'', \ldots,$$

et cela par des observations également exactes, la valeur la

plus probable de p est

$$A = \frac{am + a'm' + a''m'' + \ldots}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots},$$

en posant

$$m = M - n, \quad m' = M' - n', \quad m'' = M'' - n'', \ldots .$$

Pour apprécier le degré de précision qu'on doit attribuer à cette valeur, supposons que la probabilité d'une erreur Δ, commise dans les observations, soit exprimée par

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2};$$

il en résultera que la probabilité que la vraie valeur de p soit $A + p'$, sera proportionnelle à la fonction

$$e^{-h^2 [(ap - m)^2 + (a'p - m')^2 + (a''p - m'')^2 + \ldots]}$$

dans laquelle on aura fait

$$p = A + p'.$$

L'exposant de cette fonction peut être réduit à la forme

$$-h^2 (a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)(p^2 - 2pA + B),$$

dans laquelle B désigne une quantité indépendante de p : la fonction sera par suite proportionnelle à

$$e^{-h^2 (a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots) p'^2}.$$

On voit que le degré de précision qu'il faut attribuer à la valeur de A est le même que si cette valeur avait été trouvée par une observation immédiate dont la précision serait à la précision des observations primitives comme

$$h\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots} \text{ est à } h,$$

ou comme

$$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots} \text{ est à } 1.$$

8.

Avant de rechercher, dans le cas de plusieurs inconnues, le degré de précision qu'on doit attribuer à chacune d'elles, il importe d'étudier plus attentivement la fonction

$$v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots,$$

que nous désignerons par W.

I. Posons

$$\frac{1}{2}\frac{dW}{dp} = p' = \lambda + \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \ldots$$

et

$$W - \frac{p'^2}{\alpha} = W',$$

il en résulte évidemment

$$p' = P;$$

comme on a

$$\frac{dW'}{dp} = \frac{dW}{dp} - \frac{2p'}{\alpha}\frac{dp'}{dp} = 0,$$

on voit que la fonction W′ sera indépendante de p. Le coefficient

$$\alpha = a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots,$$

sera toujours évidemment une quantité positive.

II. De même, posons,

$$\frac{1}{2}\frac{dW'}{dq} = q' = \lambda' + \beta' q + \gamma' r + \delta' s + \ldots$$

et

$$W' - \frac{q'^2}{\beta'} = W'',$$

on aura

$$q' = \frac{1}{2}\frac{dW}{dq} - \frac{p'}{\alpha}\cdot\frac{dp'}{dq} = Q - \frac{\beta}{\alpha}p'$$

et

$$\frac{dW''}{dq} = 0.$$

Donc la fonction W″ est indépendante à la fois de p et de q. Ces circonstances n'auraient plus lieu si l'on pouvait



avoir

$$\beta' = 0.$$

Mais il est clair que W′ se déduit de

$$v^2 + v'^2 + v''^2 + \ldots,$$

en remplaçant dans v, v', v'', etc., la quantité p par sa valeur tirée de l'équation

$$p' = 0 :$$

donc β' sera la somme des coefficients de q^2 dans v^2, v'^2, v''^2, etc., après cette substitution. Mais ces coefficients sont tous des carrés et ne peuvent s'évanouir tous à la fois, si ce n'est dans le cas, que nous excluons de nos recherches, où les inconnues seraient indéterminées; donc β' doit être positive.

III. Si l'on pose, enfin,

$$\frac{1}{2}\frac{dW''}{dr} = r' = \lambda'' + \gamma'' r + \delta'' s + \ldots$$

et

$$W'' - \frac{r'^2}{\gamma''} = W''',$$

on aura

$$r' = R - \frac{\gamma}{\alpha} p' - \frac{\gamma'}{\beta'} q',$$

et W‴ sera indépendant de p, de q et de r. On prouvera comme plus haut que le coefficient γ'' doit être positif. On voit, en effet, facilement que γ'' est la somme des coefficients de r^2 dans v^2, v'^2, v''^2, etc., après que les quantités p et q ont été éliminées de v, v', v'', etc., à l'aide des équations

$$p' = 0, \quad q' = 0.$$

IV. De la même manière en posant

$$\frac{1}{2}\frac{dW'''}{ds} = s' = \lambda''' + \delta''' s + \ldots, \qquad W^{\text{iv}} = W''' - \frac{s'^2}{\delta'''},$$

On aura

$$s' = S - \frac{\delta}{\alpha} p' - \frac{\delta'}{\beta'} q' - \frac{\delta''}{\gamma''} r',$$

W^{IV} sera indépendant de p, q, r et s, et δ''' une quantité positive.

V. S'il y a un plus grand nombre d'inconnues, on continuera de la même manière et l'on aura enfin

$$W = \frac{1}{\alpha} p'^2 + \frac{1}{\beta'} q'^2 + \frac{1}{\gamma''} r'^2 + \frac{1}{\delta'''} s'^2 + \ldots + \text{const.},$$

expression où α, β', γ'', δ''', etc., désignent des quantités positives.

VI. On a déjà vu que la probabilité d'un système de valeurs de p, q, r, s, etc., était proportionnelle à la fonction $e^{-h^2 W}$: par conséquent, la valeur de p restant indéterminée, la probabilité d'un certain système de valeurs de q, r, s, etc., sera proportionnelle à l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 W} dp,$$

qui est égale, d'après le théorème de Laplace, à

$$h^{-1} \alpha^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-h^2 \left(\frac{1}{\beta'} q'^2 + \frac{1}{\gamma''} r'^2 + \ldots\right)},$$

et cette probabilité sera proportionnelle à la fonction

$$e^{-h^2 W'}.$$

De même, si l'on considère de plus q comme indéterminé, la probabilité d'un système de valeurs de r, s, etc., sera proportionnelle à

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 W'} dq,$$

c'est-à-dire à

$$h^{-1} \beta'^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-h^2 \left(\frac{1}{\gamma''} r'^2 + \frac{1}{\delta'''} s'^2 + \ldots\right)};$$

et, par suite, proportionnelle à $e^{-h^2 W''}$. De même si r est aussi regardée comme indéterminée, la probabilité d'un système de valeurs déterminées de s, etc., sera proportionnelle à $e^{-h^2 W'''}$, et ainsi de suite. Supposons que le nombre des inconnues se réduise à quatre; les conclusions seraient les mêmes dans le cas général. La valeur la plus probable de s sera

$$-\frac{\lambda'''}{\delta'''},$$

et la probabilité qu'elle différera de σ de la véritable valeur sera proportionnelle à

$$e^{-hh'''\sigma^2};$$

d'où nous concluons que $\sqrt{\delta'''}$ mesure la précision relative à cette détermination, en prenant pour unité la précision des observations primitives.

9.

Par la méthode du paragraphe précédent un certain degré de précision a été assigné à la seule inconnue qui, dans le travail de l'élimination, a été gardée la dernière. Pour éviter cet inconvénient, nous allons calculer δ''' d'une autre manière.

Des équations

$$P = p',$$

$$Q = q' + \frac{\beta}{\alpha} p',$$

$$R = r' + \frac{\gamma'}{\beta'} q' + \frac{\gamma}{\alpha} p',$$

$$S = s' + \frac{\delta''}{\gamma''} r'' + \frac{\delta'}{\beta'} q' + \frac{\delta}{\alpha} p',$$

on tire, en les résolvant par rapport à p', q', r', s',

$$\begin{aligned}
p' &= \mathrm{P},\\
q' &= \mathrm{Q} + \mathfrak{A}\,\mathrm{P},\\
r' &= \mathrm{R} + \mathfrak{B}'\mathrm{Q} + \mathfrak{A}'\mathrm{P},\\
s' &= \mathrm{S} + \mathfrak{C}''\mathrm{R} + \mathfrak{B}''\mathrm{Q} + \mathfrak{A}''\mathrm{P},
\end{aligned}$$

de sorte que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$, sont des quantités déterminées. On aura donc (en restreignant à quatre le nombre des inconnues)

$$s = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\mathfrak{A}''}{\delta'''}\,\mathrm{P} + \frac{\mathfrak{B}''}{\delta'''}\,\mathrm{Q} + \frac{\mathfrak{C}''}{\delta'''}\,\mathrm{R} + \frac{1}{\delta'''}\,\mathrm{S},$$

d'où résulte la conséquence suivante : Les valeurs des inconnues p, q, r, s, etc., que l'on doit tirer des équations

$$\mathrm{P} = 0, \quad \mathrm{Q} = 0, \quad \mathrm{R} = 0, \quad \mathrm{S} = 0, \ldots,$$

sont évidemment exprimées par des fonctions linéaires de P, Q, R, S, etc., savoir :

$$\begin{aligned}
p &= \mathrm{L} + \mathrm{A}\,\mathrm{P} + \mathrm{B}\,\mathrm{Q} + \mathrm{C}\,\mathrm{R} + \mathrm{D}\,\mathrm{S} + \ldots,\\
q &= \mathrm{L}' + \mathrm{A}'\,\mathrm{P} + \mathrm{B}'\,\mathrm{Q} + \mathrm{C}'\,\mathrm{R} + \mathrm{D}'\,\mathrm{S} + \ldots,\\
r &= \mathrm{L}'' + \mathrm{A}''\,\mathrm{P} + \mathrm{B}''\,\mathrm{Q} + \mathrm{C}''\,\mathrm{R} + \mathrm{D}''\,\mathrm{S} + \ldots,\\
s &= \mathrm{L}''' + \mathrm{A}'''\,\mathrm{P} + \mathrm{B}'''\,\mathrm{Q} + \mathrm{C}'''\,\mathrm{R} + \mathrm{D}'''\,\mathrm{S} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Cela posé, les valeurs les plus probables de ces inconnues sont respectivement L, L′, L″, etc. Les degrés de précision qui doivent être attribués à ces déterminations sont respectivement

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{B}'}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{C}''}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}'''}}, \ldots,$$

en prenant pour unité la précision des observations primitives ; car ce que nous avons dit plus haut de l'inconnue s $\left(\text{pour laquelle } \mathrm{D}''' \text{ répond à } \frac{1}{\delta'''}\right)$ s'applique aux autres inconnues par une simple permutation.

10.

Pour éclaircir par un exemple les recherches qui précèdent, supposons que par des observations pour lesquelles une égale précision doit être présumée, on ait trouvé

$$\begin{aligned} p - q + 2r &= 3, \\ 3p + 2q - 5r &= 5, \\ 4p + q + 4r &= 21, \end{aligned}$$

mais que, par une observation à laquelle une précision égale à $\frac{1}{2}$ doit être attribuée, on ait trouvé

$$-2p + 6q + 6r = 28.$$

A cette dernière nous substituerons la suivante,

$$-p + 3q + 3r = 14,$$

que nous supposerons provenir d'une observation aussi précise que les premières. De là on tire

$$\begin{aligned} P &= 27p + 6q - 88, \\ Q &= 6p + 15q + r - 70, \\ R &= q + 54r - 107, \end{aligned}$$

et par l'élimination

$$\begin{aligned} 19899p &= 49154 + 809P - 324Q + 6R, \\ 737q &= 2617 - 12P + 54Q - R, \\ 6633r &= 12707 + 2P - 9Q + 123R. \end{aligned}$$

Les valeurs les plus probables des inconnues seront donc

$$p = 2{,}470 \quad q = 3{,}551, \quad r = 1{,}916,$$

avec des degrés de précision égaux respectivement à

$$\sqrt{\frac{19899}{809}} = 4{,}96, \quad \sqrt{\frac{737}{54}} = 3{,}69, \quad \sqrt{\frac{2211}{21}} = 7{,}34.$$

11.

Le sujet que nous avons traité jusqu'ici donnerait lieu à d'élégantes recherches, auxquelles nous ne nous arrêterons pas, pour ne pas trop nous écarter de notre objet principal. Par la même raison, nous réservons pour une autre occasion l'exposition des artifices qui permettent de réduire le calcul à un algorithme plus expéditif. Qu'on nous permette seulement d'ajouter une seule observation.

Lorsque le nombre des fonctions ou des équations proposées est considérable, le calcul est surtout rendu pénible par cette circonstance, que les coefficients par lesquels on doit multiplier les équations primitives pour obtenir P, Q, R, S, etc., sont presque toujours des fractions décimales compliquées. Si l'on ne croit pas important dans ce cas de calculer ces produits avec le plus grand soin à l'aide des Tables de logarithmes, il suffira le plus souvent de leur substituer des nombres plus simples qui en diffèrent peu. Il ne peut en résulter d'erreurs notables qu'autant que la précision des inconnues devient moindre que la précision des observations primitives.

12.

Au reste, le principe d'après lequel la somme des carrés des différences entre les quantités observées et les quantités calculées doit être un minimum, peut encore s'établir sans recourir au calcul des probabilités, comme il suit.

Lorsque le nombre des inconnues est égal au nombre des observations, on peut déterminer les premières de manière qu'elles satisfassent aux secondes. Mais lorsque le premier nombre est le plus petit des deux, on ne peut obtenir un accord absolu lorsque les observations ne sont pas douées d'une précision absolue. Il faut donc dans ce cas chercher à établir l'accord le plus satisfaisant, c'est-à-dire à faire en sorte que les différences soient atténuées le plus possible. Mais cette idée a par elle-même quelque



chose de vague. En effet, quoiqu'un système de valeurs des inconnues doive être sans aucun doute préféré à un autre système où *toutes* ces différences seraient respectivement plus grandes, le choix entre deux systèmes dans l'un desquels l'accord serait plus satisfaisant pour quelques-unes des observations, mais moins satisfaisant pour d'autres, est en quelque sorte arbitraire, et l'on peut évidemment proposer plusieurs principes par lesquels la première condition soit remplie. En désignant par Δ, Δ', Δ'', etc., les différences entre le calcul et les observations, on satisfera à cette condition, non-seulement si $\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \ldots$, devient un minimum (ce qui est notre principe), mais encore si $\Delta^4 + \Delta'^4 + \Delta''^4 + \ldots$, ou $\Delta^6 + \Delta'^6 + \Delta''^6 + \ldots$, ou généralement une somme de puissances paires, devient un minimum. Mais de tous ces principes le nôtre est le plus simple, tous les autres nous entraînant dans des calculs extrêmement compliqués. Au reste, ce principe, dont nous avons fait usage dès l'année 1795, a été donné dernièrement par Legendre dans ses *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris, 1806; on trouvera dans cet ouvrage plusieurs conséquences que le désir d'abréger nous a fait omettre.

Si l'exposant de la puissance paire dont nous venons de parler était infini, nous serions ramené au système dans lequel les plus grandes erreurs sont moindres que dans tout autre système.

Laplace se sert, pour la résolution d'équations linéaires en nombre plus grand que les inconnues, d'un autre principe, proposé d'abord par Boscovich, savoir, que la somme des valeurs absolues des différences devienne minimum. On peut facilement démontrer que le système des valeurs des inconnues trouvé par ce seul principe doit nécessairement (*) satisfaire à autant d'équations, prises parmi les

(*) Excepté quelques cas spéciaux où il y a indétermination.

proposées, qu'il y a d'inconnues, de sorte que les autres équations ne sont employées que pour décider le choix que l'on doit faire.

Si, par exemple, l'équation $V = M$ est du nombre de celles qui ne sont pas satisfaites, le système des valeurs trouvées par le principe en question ne serait pas altéré si au lieu de M on avait observé une autre valeur N telle, que, n étant la valeur calculée, les différences $M - n$ et $N - n$ fussent de même signe. Au reste, Laplace tempère en quelque sorte ce principe en y ajoutant cette nouvelle condition, que la somme des différences, prise avec leurs signes, soit nulle. Il en résulte que le nombre des équations satisfaites est moindre d'une unité que le nombre des inconnues : mais l'observation que nous venons de faire subsiste encore lorsqu'il n'y a que deux inconnues.

NOTE II.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS A LA CORRECTION DES ÉLÉMENTS DE LA PLANÈTE PALLAS.

1.

M. Gauss a donné, dans le tome I des *Mémoires de Gottingue*, l'application de sa méthode à la correction des éléments de la planète *Pallas*. L'illustre géomètre ayant développé sur cet exemple l'algorithme indiqué plus brièvement dans son grand onvrage *Theoria Motus Corporum cœlestium* (*voir* la Note précédente), nous avons cru devoir traduire ici cette portion de son Mémoire. La première partie exigeant la connaissance approfondie de la théorie du mouvement des planètes, nous nous dispenserons de la reproduire, et nous prendrons pour point de départ les douze équations auxquelles les corrections des six éléments de l'orbite doivent satisfaire.



En désignant ces corrections par

$$dL,\quad d7,\quad d\pi,\quad d\varphi,\quad d\Omega,\quad di,$$

les équations obtenues par M. Gauss sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
o &= -183'',93 + 0,79363\,dL + 143,66\,d7 + 0,39493\,d\pi \\
&\quad + 0,95920\,d\varphi - 0,18856\,d\Omega + 0,17387\,di; \\
o &= -6'',81 - 0,02658\,dL + 46,71\,d7 + 0,02658\,d\pi \\
&\quad - 0,20858\,d\varphi + 0,15946\,d\Omega + 1,25782\,di; \\
o &= -0'',06 + 0,58880\,dL + 358,12\,d7 + 0,26208\,d\pi \\
&\quad - 0,85234\,d\varphi + 0,14912\,d\Omega + 0,17775\,di; \\
o &= -3'',09 + 0,01318\,dL + 28,39\,d7 - 0,01318\,d\pi \\
&\quad - 0,07861\,d\varphi + 0,91704\,d\Omega + 0,54365\,di; \\
o &= -0'',02 + 1,73436\,dL + 1846,17\,d7 - 0,54603\,d\pi \\
&\quad - 2,05662\,d\varphi - 0,18833\,d\Omega - 0,17445\,di; \\
o &= -8'',98 - 0,12606\,dL - 227,42\,d7 + 0,12606\,d\pi \\
&\quad - 0,38939\,d\varphi + 0,17176\,d\Omega - 1,35441\,di; \\
o &= -2'',31 + 0,99584\,dL + 1579,03\,d7 + 0,06456\,d\pi \\
&\quad + 1,99545\,d\varphi - 0,06040\,d\Omega - 0,33750\,di; \\
o &= +2'',47 - 0,08089\,dL - 67,22\,d7 + 0,08089\,d\pi \\
&\quad - 0,09970\,d\varphi - 0,46359\,d\Omega + 1,22803\,di; \\
o &= +0'',01 + 0,65311\,dL + 1329,09\,d7 + 0,38994\,d\pi \\
&\quad - 0,08439\,d\varphi - 0,04305\,d\Omega + 0,34268\,di; \\
o &= +38'',12 - 0,00218\,dL + 38,47\,d7 + 0,00218\,d\pi \\
&\quad - 0,18710\,d\varphi + 0,47301\,d\Omega - 1,14371\,di; \\
o &= -317'',73 + 0,69957\,dL + 1719,32\,d7 + 0,12913\,d\pi \\
&\quad - 1,38787\,d\varphi + 0,17130\,d\Omega - 0,08360\,di; \\
o &= +117'',97 - 0,01315\,dL - 43,84\,d7 + 0,01315\,d\pi \\
&\quad + 0,02929\,d\varphi + 1,02138\,d\Omega - 0,27187\,di.
\end{aligned}$$

D'après la nature des observations qui ont fourni la dixième de ces équations, elle inspire trop peu de confiance pour qu'on juge utile de la faire intervenir, et c'est d'après les onze autres seulement que l'on déterminera les six inconnues.

Les explications suivantes sont littéralement traduites du Mémoire de M. Gauss.

2.

Dans l'impossibilité où nous sommes de satisfaire exactement aux onze équations proposées, c'est-à-dire d'annuler tous les seconds membres, nous chercherons à rendre la somme de leurs carrés aussi petite que possible.

On aperçoit facilement que si l'on considère les fonctions linéaires

$$n + ap + bq + cr + ds + \ldots = w,$$
$$n' + a'p + b'q + c'r + d's + \ldots = w',$$
$$n'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \ldots = w'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les équations qu'il faut résoudre pour rendre

$$\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 \ldots$$

un minimum, sont

$$aw + a'w' + a''w'' + \ldots = 0,$$
$$bw + b'w' + b''w'' + \ldots = 0,$$
$$cw + c'w' + c''w'' + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou, en posant, pour abréger,

$$an + a'n' + a''n'' + \ldots = (an),$$
$$a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots = (aa),$$
$$ab + a'b' + a''b'' + \ldots = (ab),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots\ldots = (bb),$$
$$bc + b'c' + b''c'' + \ldots\ldots = (bc),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

p, q, r, s, etc., devront se déterminer par les équations sui-

vantes :

$$\begin{array}{l}(an)+(aa)p+(ab)q+(ac)r+\ldots=0,\\ (bn)+(ab)p+(bb)q+(bc)r+\ldots=0,\\ (cn)+(ac)p+(bc)q+(cc)r+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

L'élimination, très-pénible lorsque le nombre des inconnues est considérable, peut se simplifier notablement de la manière suivante. Outre les coefficients (an), (aa), etc., [dont le nombre est $\frac{1}{2}(i^2+3i)$, si le nombre des inconnues est i], supposons que l'on ait calculé la somme

$$n^2+n'^2+n''^2+\ldots=(nn);$$

on voit facilement que l'on a

$$\begin{array}{l}\Omega=(nn)+2(an)p+2(bn)q+2(cn)r+\ldots\\ \quad+(aa)p^2+2(ab)pq+2(ac)pr+\ldots\\ \quad+(bb)q^2+2(bc)qr+2(bd)qs+\ldots\\ \quad+(cc)r^2+2(cd)rs+\ldots;\end{array}$$

et, en désignant

$$(an)+(aa)p+(ab)q+\ldots$$

par A, tous les termes de $\frac{A^2}{(aa)}$ qui contiennent le facteur p, se trouvent dans l'expression Ω, et, par suite,

$$\Omega-\frac{A^2}{(aa)}$$

est une fonction indépendante de p. C'est pourquoi, en posant

$$\begin{array}{l}(nn)-\frac{(an)^2}{(aa)}=(nn,1),\\ (bn)-\frac{(an)(bn)}{(aa)}=(bn,1),\\ (cn)-\frac{(an)(cn)}{(aa)}=(cn,1),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

$$(bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} = (bb,1),$$

$$(bc) - \frac{(ab)(ac)}{(aa)} = (bc,1),$$

$$(bd) - \frac{(ab)(ad)}{(aa)} = (bd,1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on aura

$$\begin{aligned}\Omega - \frac{A^2}{(aa)} = (nn,1) + 2(bn,1)q + 2(cn,1)r + 2(dn,1)s \ldots \\ + (bb,1)q^2 + 2(bc,1)qr + 2(bd,1)qs \\ + (cc,1)r^2 + 2(cd,1)rs \\ + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

nous désignerons cette fonction par Ω'.

De même, en posant

$$(bn,1) + (bb,1)q + (bc,1)r \ \ldots = B,$$

la différence

$$\Omega' - \frac{B^2}{(bb,1)}$$

sera indépendante de q; nous la représenterons par Ω''.

En posant, de même,

$$(nn,1) - \frac{(bn,1)^2}{(bb,1)} = (nn,2),$$

$$(cn,1) - \frac{(bn,1)(bc,1)}{(bb,1)} = (cn,2),$$

$$(cc,1) - \frac{(bc,1)^2}{(bb,1)} = (cc,2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et

$$(cn,2) + (cc,2)r + (cd,2)s + \ldots = C,$$

la différence

$$\Omega'' - \frac{C^2}{(cc,2)}$$

sera une fonction indépendante de r.

En continuant ainsi, nous formerons une suite d'expressions Ω, Ω', Ω'', etc., dont la dernière sera indépendante des diverses inconnues, et représentée par (nn, μ), si μ désigne le nombre de ces inconnues; nous aurons alors

$$\Omega = \frac{A^2}{(aa)} + \frac{B^2}{(bb,1)} + \frac{C^2}{(cc,2)} + \frac{D^2}{(dd,3)} + \ldots + (nn, \mu).$$

On prouvera facilement que Ω étant une somme de carrés

$$w^2 + w'^2 + w''^2 + \ldots,$$

et ne pouvant devenir négative, les diviseurs (aa), $(bb, 1)$, $(cc, 2)$, etc., sont tous positifs. (Nous supprimons, pour abréger, le détail de la démonstration.) D'après cela, la valeur minimum de Ω correspond évidemment aux valeurs des inconnues, pour lesquelles

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \ldots,$$

et, en commençant à résoudre le système par la dernière équation, qui ne contient qu'une inconnue, on trouvera les valeurs de p, q, r, s, etc., sans avoir aucune élimination à effectuer. La méthode donne, en même temps, la valeur minimum de Ω, qui est (nn, μ).

3.

Appliquons ces principes à notre exemple, dans lequel p, q, r, s, etc., sont remplacés par dL, $d7$, $d\pi$, $d\varphi$, $d☊$, di. J'ai trouvé, par des calculs exécutés avec soin :

$(nn) = 148848$,	$(ac) = -0{,}09344$,
$(an) = -371{,}09$,	$(ad) = -2{,}28516$,
$(bn) = -580104$,	$(ae) = -0{,}34664$,
$(cn) = -113{,}45$,	$(af) = -0{,}18194$,
$(dn) = +268{,}53$,	$(bb) = +10834225$,
$(en) = +94{,}26$,	$(bc) = -49{,}06$,
$(fn) = -31{,}81$,	$(bd) = -3229{,}77$,
$(aa) = +5{,}91569$,	$(be) = -198{,}64$,
$(ab) = +7203{,}91$	$(bf) = -143{,}05$,

$(cc) = + 0,71917$
$(cd) = + 1,13382,$
$(ce) = + 0,06400,$
$(cf) = + 0,26341,$
$(dd) = + 12,00340,$
$(de) = - 0,37137,$
$(df) = - 0,11762,$
$(ee) = + 2,28215,$
$(ef) = - 0,36136,$
$(ff) = + 5,62456.$

D'où l'on déduit :

$(nn,1) = + 125569,$
$(bn,1) = - 138534,$
$(cn,1) = - 119,31,$
$(dn,1) = - 125,18,$
$(en,1) = + 72,52,$
$(fn,1) = - 43,22,$
$(bb,1) = + 2458225,$
$(bc,1) = + 62,13,$
$(bd,1) = - 510,58,$
$(be,1) = + 213,84,$
$(bf,1) = + 73,45,$
$(cc,1) = + 0,71769,$
$(cd,1) = + 1,09773,$
$(ce,1) = - 0,05852,$
$(cf,1) = + 0,26054,$
$(dd,1) = + 11,12064,$
$(de,1) = - 0,50528,$
$(df,1) = - 0,18790,$
$(ee,1) = + 2,26185,$
$(cf,1) = - 0,37,202,$
$(ff,1) = + 5,61905.$

De la même manière :

$(nn,2) = + 117763,$
$(cn,2) = - 115,81,$
$(dn,2) = - 153,95,$
$(en,2) = + 84,57,$
$(fn,2) = - 39,03,$
$(cc,2) = + 0,71612,$
$(cd,2) = + 1,11063,$
$(ce,2) = - 0,06392,$
$(cf,2) = + 0,25868,$
$(dd,2) = + 11,01466,$
$(de,2) = - 0,46088,$
$(df,2) = - 0,17265,$
$(ee,2) = + 2,24325,$
$(ef,2) = - 0,37841,$
$(ff,2) = + 5,61686.$

D'où :

$(nn,3) = + 99034,$
$(dn,3) = + 25,66,$
$(en,3) = + 74,23,$
$(fn,3) = + 2,75,$
$(dd,3) = + 9,29213,$
$(de,3) = - 0,36175,$
$(df,3) = - 0,57384,$
$(ee,3) = + 2,23754,$
$(ef,3) = - 0,35532,$
$(ff,3) = + 5,52342.$

De même :

$(nn,4) = + 98963,$
$(en,4) = + 75,23,$
$(fn,4) = + 4,33,$
$(ee,4) = + 2,22346,$
$(ef,4) = - 0,37766,$
$(ff,4) = + 5,48798.$

D'où :

$(nn,5) = + 96418,$
$(fn,5) = + 17,11,$
$(ff,5) = + 5,42383.$

D'où enfin :

$(nn,6) = + 96364.$

Nous avons donc les six équations suivantes :

$$0 = +\ 17'',11 + 5,42383\,di,$$

$$0 = +\ 75'',23 + 2,22346\,d\Omega - 0,37766\,di,$$

$$0 = +\ 25'',66 + 9,29213\,d\varphi - 0,36175\,d\Omega - 0,57384\,di,$$

$$0 = -115'',81 + 0,71612\,d\pi + 1,11063\,d\varphi - 0,06392\,d\Omega + 0,25868\,di,$$

$$0 = -13854'' + 2458225\,d7 + 62,13\,d\pi - 0,51058\,d\varphi + 213,84\,d\Omega + 73,45\,di,$$

$$0 = -371'',09 + 5,91569\,dL + 7203,91\,d7 - 0,00344\,d\pi - 2.20516\,d\varphi - 0,34664\,d\Omega - 0,18194\,di;$$

d'où l'on déduit :

$$di = -\ 3'',15;$$

$$d\Omega = -\ 34'',37;$$

$$d\varphi \doteq -\ 4'',29;$$

$$d\pi = +\ 166'',44;$$

$$d7 = +\ 0'',054335;$$

$$dL = -\ 3'',06.$$

Telles sont les corrections qu'il faut apporter aux éléments trouvés d'abord pour la planète.

NOTE III.

MÉMOIRE SUR LA DÉTERMINATION DE LA PRÉCISION DES OBSERVATIONS,

PAR M. GAUSS.

(Extrait du *Zeitschrift für Astronomie und Verwandte Wissenschaften*, tome I, page 185.)

1.

Pour établir les principes de la méthode des moindres carrés, nous avons admis que la probabilité d'une erreur

d'observation Δ soit exprimée par la formule

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2},$$

où π représente la demi-circonférence, e la base des logarithmes hyperboliques, et h une constante que l'on peut considérer [*Theoria Motus Corporum cœlestium*, art. 178 (*)] comme la mesure de l'exactitude des observations. Il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de h pour déterminer, à l'aide de la méthode des moindres carrés, les valeurs les plus probables des quantités dont les observations dépendent, le *rapport* de l'exactitude des résultats à l'exactitude des observations est également indépendant de h.

Toutefois, comme la connaissance de la quantité h est très-intéressante et instructive, je vais montrer comment les observations peuvent servir à la déterminer.

2.

Commençons par quelques remarques qui éclairciront la question, et représentons par $\Theta(t)$ l'intégrale définie

$$\int_0^t \frac{2e^{-t^2}dt}{\sqrt{\pi}}.$$

Quelques valeurs particulières de cette fonction donneront une idée de sa marche :

$t = 0{,}476\,9363 = \rho$	$\Theta t = 0{,}5$
$t = 0{,}595\,1161 = \rho \times 1{,}247\,790$	$\Theta t = 0{,}6$
$t = 0{,}732\,8691 = \rho \times 1{,}536\,618$	$\Theta t = 0{,}7$
$t = 0{,}906\,1939 = \rho \times 1{,}900\,032$	$\Theta t = 0{,}8$
$t = 1 \qquad = \rho \times 2{,}096\,716$	$\Theta t = 0{,}842\,7008$
$t = 1{,}163\,0872 = \rho \times 2{,}348\,664$	$\Theta t = 0{,}9$
$t = 1{,}821\,3864 = \rho \times 3{,}818\,930$	$\Theta t = 0{,}99$
$t = 2{,}327\,6754 = \rho \times 4{,}880\,475$	$\Theta t = 0{,}999$
$t = 2{,}751\,0654 = \rho \times 5{,}768\,204$	$\Theta t = 0{,}9999$
$t = \infty \qquad = \infty$	$\Theta t = 1$

(*) *Voyez* page 119 de ce volume. J. B.

La probabilité que l'erreur d'une observation soit comprise dans les limites $+\Delta$ et $-\Delta$; ou, abstraction faite des signes, qu'elle ne surpasse pas Δ, sera égale à

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\Delta}^{\Delta} e^{-h^2x^2}\,dx\,;$$

elle sera le double de l'intégrale en question, lorsque celle-ci est prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\Delta$, et, par conséquent, elle sera égale à $\Theta\,(h\Delta)$.

Ainsi la probabilité que l'erreur ne soit pas moindre que $\frac{\rho}{h}$ est égale à $\frac{1}{2}$, ou égale à la probabilité du cas contraire. J'appellerai donc cette quantité $\frac{\rho}{h}$ l'*erreur probable*, et je la désignerai par r.

Au contraire, la probabilité que l'erreur excède $r \times 2{,}438\,664$ n'est que de $\frac{1}{10}$; la probabilité que l'erreur surpasse $r \times 3{,}818\,390$ n'est que de $\frac{1}{100}$; et ainsi de suite.

3.

Supposons maintenant que les erreurs de m observations réellement faites soient α, β, γ, etc., et cherchons quelles conséquences on en peut tirer relativement aux valeurs de h et r.

En faisant deux hypothèses sur la valeur exacte de h, et la supposant égale à H ou égale à H′, les probabilités qu'elles soient entachées des erreurs α, β, γ, etc., seront, pour les deux cas, dans le rapport de

$$\mathrm{H}\,e^{-\mathrm{H}^2\alpha^2} \times \mathrm{H}\,e^{-\mathrm{H}^2\beta^2} \times \mathrm{H}\,e^{-\mathrm{H}^2\gamma^2} \times \ldots$$

à

$$\mathrm{H}'e^{-\mathrm{H}'^2\alpha^2} \times \mathrm{H}'e^{-\mathrm{H}'^2\beta^2} \times \mathrm{H}'e^{-\mathrm{H}'^2\gamma^2} \times \ldots,$$

c'est-à-dire comme

$$\mathrm{H}^m e^{-\mathrm{H}^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)} \quad \text{est à} \quad \mathrm{H}'^m e^{-\mathrm{H}'^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}.$$

Il est évident que les probabilités que H ou H′ soient les

véritables valeurs de h, sont dans le même rapport [*Theoria Motus Corporum cœlestium*, art. 176 (*)]; par conséquent la probabilité d'une valeur quelconque de h est proportionnelle à

$$h^m e^{-h^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)},$$

et la valeur de h la plus probable est celle pour laquelle cette fonction devient un maximum. Mais on trouve par les règles connues que h est alors égal à

$$\sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}};$$

donc la valeur de r la plus probable sera alors

$$\rho\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}{m}}$$

ou

$$0,6744897\times\sqrt{\frac{1}{m}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}.$$

Ce résultat est général, que m soit grand ou petit.

4.

Il est facile de comprendre que les valeurs trouvées pour h et pour r sont d'autant moins certaines que le nombre m est plus petit.

Développons maintenant le degré d'exactitude que l'on doit attribuer aux valeurs de h et de r lorsque m est un nombre considérable.

Désignons par H la valeur de h la plus probable que nous avons trouvée,

$$\sqrt{\frac{m}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}},$$

et remarquons que la probabilité que H soit la véritable valeur de h, est à la probabilité que $(\mathrm{H}+\lambda)$ soit cette véri-

(*) *Voyez* page 116 de ce volume. J. B.

table valeur dans le rapport de

$$H^m . e^{-\frac{m}{2}} \quad \text{à} \quad (H+\lambda)^m . e^{-\frac{m(H+\lambda)^2}{2H^2}},$$

ou comme

$$1 : e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2}\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda}{H}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}+\ldots\right)}.$$

Le second terme ne sera sensible par rapport au premier que si $\frac{\lambda}{H}$ est une petite fraction, et, dans ce cas, nous pourrons remplacer le rapport indiqué par

$$1 : e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2}}.$$

Ce qui veut dire : La probabilité que la valeur véritable de h soit comprise entre $(H+\lambda)$ et $(H+\lambda+d\lambda)$ est approximativement égale à

$$K e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2}} d\lambda,$$

où K est une constante telle, que l'intégrale

$$\int K e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2}} d\lambda$$

prise entre les limites admissibles de λ, devienne égale à l'unité.

Comme dans le cas actuel, à cause de la grande valeur de m, $e^{-\frac{\lambda^2 m}{H^2}}$ devient excessivement petit lorsque $\frac{\lambda}{H}$ cesse d'être une petite fraction, il sera permis de prendre l'intégrale depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et l'on obtient

$$K = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{m}{\pi}}.$$

Par conséquent, la probabilité que la véritable valeur de h

soit comprise entre $(H - \lambda)$ et $(H + \lambda)$, sera égale à

$$\Theta\left(\frac{\lambda}{H}\sqrt{m}\right),$$

et sera égale à $\frac{1}{2}$ lorsque $\frac{\lambda}{H}\sqrt{m} = \rho$.

Il y a donc un contre un à parier que la véritable valeur de h soit entre

$$H\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{et} \quad H\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{m}}\right),$$

ou que la véritable valeur de r soit entre

$$\frac{R}{1 - \frac{\rho}{\sqrt{m}}} \quad \text{et} \quad \frac{R}{1 + \frac{\rho}{\sqrt{m}}},$$

où R désigne la valeur la plus probable de r trouvée dans l'article précédent. Ces limites peuvent s'appeler les *limites probables des véritables valeurs* de h et de r. Il est évident que nous pourrons admettre ici pour limites probables de r :

$$R\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{et} \quad R\left(1 + \frac{\rho}{\sqrt{m}}\right).$$

5.

Dans la discussion précédente, nous avons considéré α, β, γ, etc., comme des quantités définies et données, afin d'évaluer la probabilité que la véritable valeur de h ou de r soit comprise entre certaines limites.

On peut envisager la question sous un autre point de vue, en admettant que les erreurs des observations soient soumises à une loi déterminée de probabilité; on peut alors évaluer la probabilité pour que la somme des carrés de m erreurs d'observations tombe entre certaines limites. Laplace a déjà résolu ce problème dans le cas où m est un

nombre très-grand, ainsi que le problème de déterminer la probabilité que la somme de m erreurs d'observations tombe entre certaines limites.

Il est facile de généraliser cette recherche; je me bornerai à indiquer ici le résultat.

Désignons par $\varphi(x)$ la probabilité d'une erreur d'observation x, de manière que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi x . dx = 1.$$

Désignons encore par K_n la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi x . x^n dx.$$

Soit ensuite

$$S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \ldots,$$

où α, β, γ, etc., représentent m erreurs quelconques d'observation; les termes de cette somme seront tous pris positivement, même si n est impair.

$m K_n$ sera alors la valeur la plus probable de S_n, et la probabilité que la véritable valeur de S_n tombe entre les limites $(m K_n - \lambda)$ et $(m K_n + \lambda)$ sera égale à

$$\Theta \frac{\lambda}{\sqrt{2m(K_{2n} - K_n^2)}};$$

par conséquent, les limites probables de S_n seront

$$m K_n - \rho \sqrt{2m(K_{2n} - K_n^2)}$$

et

$$m K_n + \rho \sqrt{2m(K_{2n} - K_n^2)}.$$

Ce résultat s'applique, d'une manière générale, à toute loi des erreurs d'observation. En l'appliquant au cas particulier où

$$\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2},$$

nous trouverons

$$K_n = \frac{\Pi \frac{1}{2}(n-1)}{h^n \sqrt{\pi}},$$

où le signe caractéristique Π est pris dans la signification des *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* (*) (*Comm. nov. Soc. Gotting.*, tome III; M. 5, art. 28.)

Ainsi

$$K = 1, \qquad K_1 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}};$$

$$K_2 = \frac{1}{2h^2}, \qquad K_3 = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}};$$

$$K_4 = \frac{1.3}{4h^4}, \qquad K_5 = \frac{1.2}{h^5\sqrt{\pi}};$$

$$K_6 = \frac{1.3.5}{8h^6}, \qquad K_7 = \frac{1.2.3}{h^7\sqrt{\pi}};$$

....

par conséquent la valeur la plus probable de S_n sera

$$\frac{m\Pi \frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}},$$

et les limites les plus probables de la véritable valeur de S_n seront

$$\frac{m\Pi\frac{n-1}{2}}{h^n\sqrt{\pi}} \cdot \left\{1 - \rho\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{\Pi(n-\frac{1}{2}).\sqrt{\pi}}{[\Pi\frac{1}{2}(n-1)]^2} - 1\right]}\right\}$$

et

$$\frac{m\Pi\frac{n-1}{2}}{h^n\sqrt{\pi}} \cdot \left\{1 + \rho\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{\Pi(n-\frac{1}{2}).\sqrt{\pi}}{\left(\Pi\frac{n-1}{2}\right)^2} - 1\right]}\right\}.$$

(*) D'après la notation adoptée par un grand nombre de géomètres, on aurait

$$\Pi(n) = \Gamma(n+1).$$

J. B.

Donc, si nous posons comme ci-dessus

$$\frac{\rho}{h} = r,$$

où r représente l'erreur probable d'observation, la valeur la plus probable de

$$\rho \sqrt[n]{\frac{S_n \sqrt{\pi}}{m\,\Pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}}$$

sera évidemment r; et les limites probables de la valeur de cette quantité seront

$$r \left\{ 1 - \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right).\sqrt{\pi}}{\left(\Pi\frac{n-1}{2}\right)^2} - n\right]} \right\}$$

et

$$r \left\{ 1 + \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right).\sqrt{\pi}}{\left(\Pi\frac{n-1}{2}\right)^2} - 1\right]} \right\}.$$

Il y a donc aussi un contre un à parier que r soit compris entre les limites

$$\rho \sqrt[n]{\frac{S_n.\sqrt{\pi}}{m\,\Pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}} . \left\{ 1 - \frac{\rho}{n} \sqrt{\frac{2}{m}.\left[\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right).\sqrt{\pi}}{\Pi\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} - 1\right]} \right\}$$

et

$$\rho \sqrt[n]{\frac{S_n.\sqrt{\pi}.}{m\,\Pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}} . \left\{ 1 + \rho \sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right).\sqrt{\pi}}{\left(\Pi\frac{n-1}{2}\right)^2} - 1\right]} \right\}.$$

Pour $n = 2$, ces limites seront

$$\rho \sqrt{\frac{2 S_2}{m}} . \left(1 - \frac{\rho}{m}\right)$$

et

$$\rho \sqrt{\frac{2 S_2}{m}} . \left(1 + \frac{\rho}{m}\right);$$

ce qui s'accorde parfaitement avec celles que nous avons trouvées art. 4.

En général on aura, si n est pair, les limites

$$\rho\sqrt{2}\cdot\sqrt[n]{\frac{S_n}{m.1.3.5.7..(n-1)}}$$
$$\times\left\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{(n+1).(n+3)\ldots(2n-1)}{1.3.5\ldots(n-1)}-1\right]}\right\}$$

et

$$\rho\sqrt{2}\sqrt[n]{\frac{S_n}{m.1.3.5.7\ldots(n-1)}}$$
$$\times\left\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{(n+1).(n+3)\ldots(2n-1)}{1.3.5\ldots(n-1)}-1\right]}\right\},$$

et si n est impair, les limites suivantes :

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S_n\sqrt{\pi}}{m.1.2.3\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}}$$
$$\times\left\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)\pi}{[2.4.6\ldots.(n-1)]^2}-2\right]}\right\}$$

et

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S_n.\sqrt{\pi}}{m.1.2.3..\left(\frac{n-1}{2}\right)}}$$
$$\times\left\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\frac{1}{m}\left[\frac{1.3.5.7\ldots(n-1)\pi}{[2.4.6\ldots(n-1)]^2}-2\right]}\right\}.$$

6.

J'ajoute ici encore les valeurs numériques pour les cas les plus simples :

Limites probables de r.

$$\text{I.}\quad 0,845\,3473 \times \frac{S_1}{m} \cdot \left(1 \mp \frac{0,509\,5841}{\sqrt{m}}\right);$$

$$\text{II.}\quad 0,674\,4897 \times \sqrt{\frac{S_2}{m}} \cdot \left(1 \mp \frac{0,476\,9363}{\sqrt{m}}\right);$$

$$\text{III.}\quad 0,577\,1897 \times \sqrt[3]{\frac{S_3}{m}} \cdot \left(1 \mp \frac{0,497\,1987}{\sqrt{m}}\right);$$

$$\text{IV.}\quad 0,512\,5017 \times \sqrt[4]{\frac{S_4}{m}} \cdot \left(1 \mp \frac{0,550\,7186}{\sqrt{m}}\right);$$

$$\text{V.}\quad 0,465\,5532 \times \sqrt[5]{\frac{S_5}{m}} \cdot \left(1 \mp \frac{0,635\,5080}{\sqrt{m}}\right);$$

$$\text{VI.}\quad 0,429\,4972 \times \sqrt[6]{\frac{S_6}{m}} \cdot \left(1 \mp \frac{0,755\,7764}{\sqrt{m}}\right).$$

On voit encore, par cette comparaison, que la deuxième manière de déterminer r est la plus avantageuse; car cent erreurs d'observation, traitées d'après cette formule, donnent un résultat aussi sûr que

114	erreurs	d'après	la	formule	I;
109	»	»	»	»	III;
133	»	»	»	»	IV;
178	»	»	»	»	V;
251	»	»	»	»	VI.

Cependant la formule I présente l'avantage de se prêter le mieux au calcul numérique; et comme son degré d'exactitude est peu inférieur à celui de la formule II, on peut toujours s'en servir, à moins que l'on ne connaisse déjà la somme des carrés des erreurs ou qu'on désire la connaître.

7.

Le procédé suivant est encore plus commode, mais beaucoup moins exact.

Ordonnons par ordre de grandeur les valeurs absolues des m erreurs d'observation, et désignons par M le terme du milieu si leur nombre est impair, ou la moyenne arithmétique entre les deux termes du milieu si leur nombre est pair.

On peut démontrer (ce que nous ne ferons pas ici) que, pour un grand nombre d'observations, la valeur la plus probable de M est r, et que les limites probables de M sont

$$r\left(1 - e\rho^2 . \sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right),$$

et

$$r\left(1 + e\rho^2 . \sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right),$$

ou que les limites probables de la valeur de r sont

$$M\left(1 - e\rho^2 . \sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right)$$

et

$$M\left(1 + e\rho^2 . \sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right),$$

ou, en nombres,

$$M\left(1 \mp \frac{0,7520974}{\sqrt{m}}\right).$$

Ce procédé n'est, par conséquent, pas beaucoup moins exact que l'application de la formule VI, et il faudrait mettre en compte 249 erreurs d'observation pour obtenir un résultat aussi certain qu'en appliquant la formule II à cent erreurs d'observation.

8.

L'application de ces méthodes aux erreurs commises dans 48 observations des ascensions droites de l'étoile Polaire,

par Bessel (*), a donné

$$S_1 = 60'',46,$$
$$S_2 = 110'',600,$$
$$S_3 = 250'',341118.$$

De là on a déduit les valeurs les plus probables de r :

D'après la formule I.	1'',065,	Erreur probable	$= \pm 0'',068$,
» II.	1'',024,	»	$= \pm 0'',070$,
» III.	1'',001,	»	$= \pm 0'',072$,
et d'après l'article 7.	1'',045,	»	$= \pm 0'',113$:

concordance de résultats qu'on pouvait à peine espérer. *Bessel* donne 1'',067 et semble, par conséquent, avoir calculé d'après la formule I.

NOTE IV.

APPLICATION DU CALCUL DES PROBABILITÉS A UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PRATIQUE.

(Extrait d'une Lettre de M. Gauss à M. Schumacher; *Astronomische Nachrichten*, tome I, page 80.)

D'après votre désir, je vous envoie les règles relatives à l'emploi de la méthode des moindres carrés dans la solution du problème suivant :

Déterminer la position d'un point d'après les angles horizontaux observés de ce point entre d'autres points exactement connus.

Cette question, très-élémentaire, ne peut embarrasser ceux qui ont bien saisi l'esprit de la méthode des moindres carrés. Je développerai néanmoins les formules auxquelles

(*) Bode, *Annuaire astronomique* pour 1818, page 234.

elle conduit, en faveur des personnes qui auraient à traiter la question pratique sans avoir été à même d'étudier cette théorie.

Soient a et b les coordonnées de l'un des points donnés; nous supposerons que l'on compte les x positifs du nord au sud et les y positifs de l'ouest à l'est; soient x et y les coordonnées approchées du point inconnu et dx, dy les corrections encore inconnues qu'il faut leur attribuer. Déterminons deux quantités φ et r par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b-y}{a-x}, \quad r = \frac{a-x}{\cos\varphi} = \frac{b-y}{\sin\varphi},$$

φ étant pris dans un tel quadrant, que la valeur de r soit positive.

Posons de plus

$$\alpha = \frac{206265''(b-y)}{r^2}, \quad \beta = -\frac{206265''(a-x)}{r^2}.$$

L'azimut du premier point est alors, pour un observateur placé au second (en prenant o pour azimut d'une parallèle à l'axe des x),

$$\varphi + \alpha dx + \beta dy,$$

les deux derniers termes étant exprimés en secondes.

Soient φ', α', β' les quantités analogues à φ, α, β et relatives au deuxième des points donnés, φ'', α'', β'' celles qui se rapportent au troisième, et ainsi de suite. Supposons que, pour les mesures angulaires prises au point dont la position est inconnue, on ait fait usage d'un théodolite sans répétition, dont on dirige successivement la lunette vers les points connus, sans changer la place de l'instrument lui-même. Si h, h', h'' sont les azimuts observés, on aurait, en supposant les observations rigoureusement exactes, et dx, dy exactement connus,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi - h + \alpha dx + \beta dy &= \varphi' - h' + \alpha' dx + \beta' dy \\ &= \varphi'' - h'' + \alpha'' dx + \beta'' dy \ldots \end{aligned} \right.$$

Si donc on écrit que trois de ces différences ont la même valeur, on trouvera des valeurs approchées pour dx et dy; si l'on n'a observé que trois points, il n'y a rien de plus à faire; mais si le nombre des points considérés est plus grand, les erreurs seront le mieux compensées, en prenant la moyenne de ces diverses expressions (1), égalant à zéro la différence entre chacune d'elles et cette moyenne, et appliquant à ces équations la méthode des moindres carrés.

Si toutes les mesures sont indépendantes les unes des autres, chacune d'elles fournit une équation entre dx et dy, et il faut combiner ces équations par la méthode des moindres carrés, en ayant égard, si l'on veut, à l'inégale précision des observations.

Soient, par exemple, i l'angle compris entre le premier et le deuxième point, i' l'angle compris entre le second et le troisième, et ainsi de suite, en comptant toujours de gauche à droite; on aura les équations

$$\varphi' - \varphi - i + (\alpha' - \alpha)\,dx + (\beta' - \beta)\,dy = 0,$$
$$\varphi'' - \varphi' - i' + (\alpha'' - \alpha')\,dx + (\beta'' - \beta')\,dy = 0.$$

Si les diverses mesures ont le même poids, on déduira de ces équations deux équations normales, en les ajoutant, après avoir successivement multiplié chacune d'elles par le coefficient de dx ou par celui de dy.

Si, au contraire, les mesures des angles sont d'une exactitude inégale, et, par exemple, la première soit fondée sur μ et la seconde sur μ' répétitions, il faut que, dans les deux cas, et avant leur addition, les équations soient encore multipliées par μ, μ', etc.; on trouve ensuite dx, dy, etc., par l'élimination entre les deux équations normales ainsi trouvées.

(Les préceptes qui précèdent sont seulement destinés aux personnes auxquelles la méthode des moindres carrés est encore inconnue et pour lesquelles il sera peut-être bon de rappeler que, dans les multiplications, les signes de $\alpha' - \alpha$,

$\beta' - \beta$, etc., doivent être rigoureusement conservés. Enfin, je remarque encore que l'on a seulement en vue de compenser les erreurs commises sur les angles, les coordonnées des points donnés étant supposées exactes.)

Appliquons les indications qui précèdent aux observations que nous avons faites en commun sur le Holkensbastion, à Copenhague. Je dois prévenir que les résultats ne peuvent être ici d'une exactitude rigoureuse. Les points observés étant très-rapprochés de la station, une inexactitude de quelques dixièmes de pied sur leur position peut exercer une influence beaucoup plus grande que les erreurs habituellement à craindre sur les angles mesurés. On ne s'étonnera donc pas que la meilleure compensation des angles laisse subsister des différences beaucoup plus grandes que celles que l'on peut admettre comme possibles dans les observations de même nature. Cette application doit être prise comme un exemple de la marche à suivre dans d'autres cas.

Angles mesurés du Holkensbastion.

Friedrichsberg — Petri........	73° 35′ 22″,8;
Petri — Erlöserstburm.........	104.57.33″,0;
Erlöserstburm — Friedrichsberg.	181.27. 5″,0;
Friedrichsberg — Frauenthurm..	80.37.10″,8;
Frauenthurm — Friedrichstburm.	101.11.50″,8;
Friedrichsthurm—Friedrichsberg.	178.11. 1″,5.

Coordonnées des divers points en pieds de Paris, l'origine étant à l'Observatoire de Copenhague.

Petri............	487,7 + 1007,7;
Frauenthurm.....	710,0 + 684,2;
Friedrichsberg....	2430,6 + 8335,0;
Erlöserstburm.....	2940,0 — 3536,0;
Friedrichsthurm...	3059,3 — 2231,2.

Les coordonnées approchées du Bastion sont

$$x = + 2836,44,$$
$$y = + 444,33,$$

et nous trouvons ainsi les azimuts :

Petri............	$166^\circ 30' 42'',56 + 19,92\,dx + 83,04\,dy$;
Fruenthurm......	$173.33.50'',54 + 10,80\,dx + 95,78\,dy$;
Friedrichsberg.....	$92.56.29'',46 + 26,07\,dx + 1,34\,dy$;
Erlösersthurm.....	$271.29.25'',38 - 51,79\,dx - 1,35\,dy$;
Friedrichsthurm...	$274.45.41'',48 - 76,56\,dx - 6,38\,dy$.

L'angle sous lequel on voit la distance de Petri à Friedrichsberg est, par suite,

$$73^\circ 34' 3'',10 - 6,15\,dx + 81.70\,dy;$$

en l'égalant à l'angle observé, on a

$$-79'',70 - 6,15\,dx + 81,70\,dy = 0.$$

On obtient, de la même manière, les équations suivantes :

$$69'',82 - 71,71\,dx - 84,39\,dy = 0,$$
$$9'',08 + 77,86\,dx + 2,69\,dy = 0,$$
$$0'',28 - 15,27\,dx + 94,44\,dy = 0,$$
$$0'',04 - 87,36\,dx - 102,16\,dy = 0,$$
$$-3'',42 + 102,63\,dx + 7,72\,dy = 0.$$

En supposant les observations également précises, on déduit de là les équations normales

$$29640\,dx + 14033\,dy = 4168'',$$
$$14033\,dx + 33219\,dy = 12383'',$$

et, par suite,

$$dx = -0,05, \quad dy = 0,40;$$

les coordonnées du Bastion sont donc

$$2836,39,$$
$$444,73.$$

Les différences entre les valeurs observées des angles et celles que l'on calculerait d'après ces résultats sont trop grandes pour qu'on puisse les attribuer aux erreurs d'observation ; elles tiennent, comme nous l'avons dit, à un défaut de précision dans la détermination des points connus.



Les coordonnées x et y, adoptées comme premières approximations, ont été déduites directement du quatrième et du cinquième angle. Quoique la méthode directe doive être considérée comme un sujet presque épuisé, j'indiquerai néanmoins, pour compléter, la méthode que j'ai l'habitude d'employer en pareil cas.

Soient a et b les coordonnées du premier point connu; celles du second seront de la forme

$$a + R\cos E,\quad b + R\sin E,$$

et celles du troisième,

$$a + R'\cos E',\quad b + R'\sin E'.$$

Soient

$$a + \rho\cos\varepsilon,\quad b + \rho\sin\varepsilon$$

les coordonnées cherchées du point d'où l'on observe; soient M l'angle observé (toujours de la gauche à la droite) entre le premier et le deuxième point, et M' l'angle observé entre le premier et le troisième (en supposant qu'on en ait, s'il y a lieu, retranché 180 degrés); soient

$$\frac{R}{\sin M} = n,\qquad \frac{R'}{\sin M'} = n',$$
$$E - M = N,\quad E' - M' = N':$$

on a les deux équations

$$\rho = n\sin(\varepsilon - N),$$
$$\rho = n'\sin(\varepsilon - N'):$$

qui, écrites de la manière suivante,

$$n = \frac{\rho}{\sin(\varepsilon - N)},$$
$$n' = \frac{\rho}{\sin(\varepsilon - N')},$$

se résoudront par la méthode exposée (*Theoria Motus Corporum cœlestium*, page 82).

L'une des solutions exposées en cet endroit conduit à la

règle suivante. Soit n' plus grand, où au moins pas plus petit que n, ce qui est évidemment permis, puisqu'on peut choisir le second point arbitrairement; posons

$$\frac{n}{n'} = \text{tang}\,\zeta,$$

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(N'-N)}{\text{tang}\,(45^\circ-\zeta)} = \text{tang}\,\psi :$$

on aura

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(N'+N) + \psi;$$

ε étant connu, l'une des équations, ou même encore toutes deux, fourniront la valeur de ρ.

Dans notre exemple, si nous considérons Frauenthurm comme le premier point, Friedrichsberg comme le deuxième et Friedrichsthurm comme le troisième, nous aurons :

$$\begin{aligned} a &= 710{,}0, & b &= 684{,}2, \\ E &= 77^\circ\,19'\,31'',92, & E' &= 308^\circ\,51'\,45'',77, \\ \log R &= 3{,}8944205, & \log R' &= 3{,}5733549, \\ M &= 99^\circ\,22'\,50'',20, & M' &= 101^\circ\,11'\,50'',80, \\ N &= 337^\circ\,56'\,42'',72, & N' &= 207^\circ\,39.54'',97, \\ \log n &= 3{,}9002650, & \log n' &= 3{,}5817019. \end{aligned}$$

n' étant plus grand que n, nous changerons ici l'ordre et nous poserons

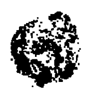
$$N = 207^\circ\,39'\,54'',97, \quad N' = 337^\circ\,56'\,42'',72,$$
$$\log n = 3{,}5817019, \quad \log n' = 3{,}9002650;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \zeta &= 19^\circ\,39'\,\,3'',87, \\ \psi &= 80.45.31'',69, \\ \varepsilon &= 353.33.50'',53, \\ \log \rho &= 3{,}3303990; \end{aligned}$$

et les coordonnées du Holkensbastion,

$$2836{,}441, \quad 444{,}330.$$



NOTE V.

SUR LA DÉTERMINATION CHRONOMÉTRIQUE DES LONGITUDES.

(*Astronomische Nachrichten*, tome V, page 227.)

Soient θ, θ', θ'', etc., les époques (au nombre de n), auxquelles un chronomètre a accusé les différences a, a', a'', etc., avec les temps des lieux dont les longitudes sont x, x', x'', etc., θ, θ', θ'', etc., étant supposées réduites au temps d'un seul et même lieu et u désignant l'avance journalière du chronomètre ; on aurait, si l'instrument était parfaitement régulier, les équations

$$a - \theta u - x = a' - \theta' u - x' = a'' - \theta'' u - x'' = \ldots$$

Pour que ces équations suffisent à la détermination des inconnues $x, x', x'', \ldots, u$, il faut, d'une part, considérer l'une des longitudes comme donnée, et, d'autre part, il est nécessaire que l'on ait observé au moins deux fois dans le même lieu ; de telle sorte que deux au moins des inconnues x, x', x'', etc., soient égales entre elles. Si parmi ces quantités il n'y en a que deux qui soient identiques, le problème est entièrement déterminé ; dans le cas contraire, il devient indéterminé, et l'on doit faire en sorte que les équations

$$\begin{aligned}
0 &= a - a' + (\theta' - \theta)\, u - x + x', \\
0 &= a' - a'' + (\theta'' - \theta')\, u - x' + x'', \\
0 &= a'' - a''' + (\theta''' - \theta'')\, u - x'' + x''', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

soient satisfaites aussi exactement que possible, car les imperfections inévitables du chronomètre ne permettront jamais de satisfaire rigoureusement à toutes. Mais on ne doit pas accorder à ces équations des poids égaux ; car les quantités

$$\begin{aligned}
&a - a' + (\theta' - \theta)\, u - x + x', \\
&a' - a'' + (\theta'' - \theta')\, u - x' + x'', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

représentent l'accumulation de tous les écarts de marche des chronomètres dans les intervalles $\theta'-\theta$, $\theta''-\theta'$, etc., et s'il s'agit d'un bon chronomètre, à qui l'on puisse réellement attribuer une marche moyenne sans variation croissante dans un seul sens, la valeur moyenne à craindre pour une pareille somme peut être considérée comme proportionnelle à la racine carrée du temps écoulé.

On devra donc, dans l'application de la méthode des moindres carrés, regarder les équations précédentes comme ayant des poids inversement proportionnels aux différences $\theta'-\theta$, $\theta''-\theta'$, $\theta'''-\theta''$, etc.

La solution n'a alors aucune difficulté, et fournira les valeurs les plus probables de x, x', x'', etc., ainsi que le poids de chaque détermination.

J'ajouterai pourtant quelques remarques.

I. Si la première et la dernière observation ont été faites au même lieu, la valeur la plus plausible de u est celle qui résulte simplement de la comparaison de ces observations extrêmes. Le calcul devient alors très-simple, car, en vertu d'un théorème bien facile à démontrer, on peut, dans les équations, remplacer u par sa valeur la plus plausible, ou, ce qui revient au même, on peut employer cette valeur supposée exacte pour corriger les observations et les ramener à ce qu'elles seraient avec un chronomètre fictif dont l'avance serait nulle.

II. Si l'on a attribué simplement aux diverses équations des poids égaux à

$$\frac{1}{\theta'-\theta}, \quad \frac{1}{\theta''-\theta'}, \quad \frac{1}{\theta'''-\theta''}, \ldots,$$

l'unité de précision pour les poids obtenus sera l'exactitude de celle que l'on obtiendrait à l'aide du même chronomètre observé deux fois seulement, et à un jour d'intervalle; mais pour pouvoir comparer les résultats obtenus à l'aide de divers chronomètres inégalement précis, il faut encore in-

troduire dans le résultat un facteur qui dépende de la plus ou de la moins grande perfection de chaque chronomètre employé.

Pour y parvenir, je suppose que les expressions

$$a - a' + (\theta' - \theta)\,u - x + x',$$
$$a' - a'' + (\theta'' - \theta')\,u - x' + x'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

deviennent respectivement λ, λ', λ'', etc., quand on substitue aux inconnues leurs valeurs les plus plausibles, soit

$$\frac{\lambda^2}{\theta' - \theta} + \frac{\lambda'^2}{\theta'' - \theta'} + \frac{\lambda''^2}{\theta''' - \theta''} + \ldots = \mathrm{S};$$

si ν est le nombre des inconnues et que l'on pose

$$m = \sqrt{\frac{\mathrm{S}}{n - \nu - 1}},$$

le facteur spécifique relatif à chaque chronomètre est proportionnel à $\frac{1}{m^2}$ ou à $\frac{n - \nu - 1}{\mathrm{S}}$, et l'on peut regarder m comme l'écart de la marche moyenne qui est à craindre pour la marche d'une journée.

III. Les règles qui précèdent sont relatives à un chronomètre dont la marche n'est soumise à aucune irrégularité sensible et croissante avec le temps. Si cette hypothèse n'était pas permise, on pourrait supposer, lorsque les observations n'embrassent qu'une période qui n'est pas excessivement considérable, une variation proportionnelle au temps dans l'avance journalière de l'instrument, en introduisant ainsi une inconnue de plus.

Les équations prendraient alors la forme suivante :

$$0 = a - a' + (\theta' - \theta)\,u + (\theta'^2 - \theta^2)\,\nu - x + x',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

IV. Pour ce qui concerne la résolution des équations d'après la méthode des moindres carrés, il n'est peut-être pas inutile de rappeler qu'on doit commencer, dans le plus grand

nombre des cas, par calculer les valeurs approchées des inconnues et appliquer ensuite la méthode à la détermination des corrections très-petites que les valeurs doivent subir.

Il nous a paru utile de rappeler ce conseil général, parce que beaucoup de calculateurs ont paru l'oublier, et ont été conduits à des calculs plus laborieux et peut-être moins exacts.

J'ai déterminé la marche des cinq chronomètres suivants :

			1	4	BREGUET 3056.	BARRAUD 904.	KESSEL 1252.
Greenwich,	30 Juin	3h.22'	− 8'.17",14	+ 1'. 2",37			
	25 Juill.	2.15	10.44,39	1.32,15	+30'.59",75	+48'.29",20	+50'.29",31
	28 »	3.13	11. 0,69	1.36,96	30.50,07	48.40,24	50.39,[illegible]
	2 Août	1.15	11.28,48	1.44.44	30.31,78	48.58,87	50.52,14
	17 »	10.18	12.59,40	2. 6,24	29.35,69	49.57,83	51.38,66
	25 »	7.27	13.47,98	2.15,84	29.10,48	50.27,15	52. 2,45
	10 Sept.	7.40	15.24,47	2.40,36			
Helgoland,	3 Juill.	3.40	−40. 8,00	−30.26,84			
	22 »	12.40	42. 2,02	30. 3,89	− 0.20,34	+16.47,39	+18.48,39
	5 Août	1.48	43.18,11	29.43,35	1.10,24	17.37,51	19.26,77
	11 »	13. 9	43.35,77	29.33,43	1.32,75	18. 1,30	19.47,22
	30 »	19.30	45.53,08	29. 7,96	2.40,67	19.17,03	20.47,68
	6 Sept.	3. 6	46.51,56	28.58,94	3. 4,55	19.43,80	21. 6,56
	7 »	8.42	46.38,72	28.56,71			
Altona,	6 Août	5.55	−51.38,95	−37.55,76	− 9.28,50	+ 9.28,48	+11.16,25
	9 »	12.35	51.57,35	37.50,03	9.38,81	9.40,30	11.27,76
	31 »	9.57	54.10,33	37.21,30	10.56,68	11. 5,92	12.25,96
	4 Sept.	22.12	54.39,16	37.15,21	11.15,36	11.24,49	12.48,10
Brême,	13 Août	0.2	−47.50,65	−33.16,49	− 5.23,37	+14.21,86	+16. 5,83

Prenons pour exemple le chronomètre de Breguet 3056. Soient o la longitude de Helgoland, $-x$ celle de Greenwich, y celle d'Altona. Je ne fais pas entrer celle de Brême dans le calcul, car n'ayant pour cette ville qu'une seule observation, il est impossible de la contrôler. Je compte le temps

à partir de la première comparaison du chronomètre n° 1 (Greenwich, 30 juin, $3^h 22^m$). En substituant au chronomètre de Breguet un instrument fictif dont l'avance soit nulle, nous trouvons :

6	
22,4	$+ \quad 60'',20;$
25,0	$+ 1949,60 - x;$
28,0	$+ 1950,87 - x;$
32,9	$+ 1950,29 - x;$
35,9	$+ \quad 59,08;$
37,1	$- \quad 434,98 + y;$
40,4	$- \quad 433,49 + y;$
42,4	$+ \quad 59,88;$
48,3	$+ 1949,60 - x;$
56,2	$+ 1952,74 - x;$
61,6	$+ \quad 61,32;$
62,2	$- \quad 432,53 + y;$
66,8	$- \quad 434,98 + y;$
68,0	$+ \quad 60,19.$

Dans les équations ci-dessus, les inconnues x et y sont séparées, ce qui facilite leur détermination; nous trouvons pour x quatre déterminations :

	POIDS.
1889″,40	$\frac{1}{2,6} = 0,38;$
1891,21	$\frac{1}{3,0} = 0,33;$
1889,78	$\frac{1}{5,9} = 0,17;$
1891,42	$\frac{1}{3,4} = 0,19;$

d'où l'on déduit :

$x = 1890'',36$ 1,07;

on trouve de même :

$y = 494'',12$ 3,83.

D'après ces valeurs, le chronomètre fictif marquera, en temps de Helgoland,

θ	λ
22,4	60",20;
25,0	59,24 — 0",96;
28,0	60,51 + 1,27;
32,9	59,93 — 0,58;
35,9	59,08 — 0,85;
37,1	59,14 + 0,06;
40,4	60,63 + 1,47;
42,4	59,88 — 0,75;
48,3	59,24 — 0,62;
56,2	62,38 + 3,14;
61,6	61,32 — 1,06;
62,2	61,59 + 0,27;
66,8	59,14 — 2,45;
68,0	60,19 + 1,05;

d'où l'on déduit :

$$S = 6{,}00,$$

$$m = \sqrt{\frac{6}{13 - 3}},$$

et l'erreur moyenne à craindre est :

pour x, 0",75;
pour y, 0",40.

Les résultats fournis par les cinq chronomètres donnent :

		Erreur moyenne à craindre.	Poids.
Breguet.....	$x =$ 1890",36	0,75	1,78
Kessel......	1893,39	0,67	2,23
Barraud....	1892,32	0,49	4,16
1........	1892,39	0,43	5,41
4........	1892,52	0,35	8,16
Moyenne..	$x =$ 1892,35		21,74

on trouve de même, pour y :

Breguet..... $y=$	494,12	0,10	6,25
Kessel.	493,89	0,36	7,72
Barraud. ...	493,67	0,21	14,79
1........	493,98	0,29	11,89
4........	494,16	0,24	17,36
			58,01

Le nombre placé sous le nom de *poids* dans la dernière colonne, est l'inverse du carré de l'erreur moyenne à craindre, en prenant ainsi, pour poids unité, celui qui correspond aux observations qui donnent une erreur moyenne à craindre égale à 1″, de sorte que, pour Altona, l'erreur moyenne à craindre est $\frac{1''}{\sqrt{58,01}} = 0'',13$; mais il vaut mieux considérer les nombres de la dernière colonne comme indiquant seulement des rapports, et déduire la précision absolue de la différence entre les valeurs des derniers résultats trouvés pour x et y au moyen de chaque chronomètre. La précision trouvée de cette manière sera toujours un peu trop grande, puisque les déterminations de temps à Greenwich, à Helgoland et à Altona n'ont pas une précision absolue, et que, par conséquent, quel que soit le nombre des chronomètres, les erreurs qui proviennent de cette source se feront toujours sentir dans chaque résultat final.

On peut obtenir, de la manière suivante, la longitude de Brême.

Soit z cette longitude à l'est de Helgoland; la comparaison du chronomètre de Breguet donne la position du chronomètre fictif,

$$-165'',52+z,$$

et l'on déduit de la comparaison avec les résultats précédents,

POIDS.

$$z=225'',40 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{1,4}=0,7;$$

les autres donneraient

		POIDS.
2 = 224,76	....	$\frac{1}{4,5} = 0,2$
225,24		0,9

Le poids 0,9 doit être multiplié par $\frac{10}{6,00}$; les cinq chronomètres donnent :

Breguet............	225,24	1,5
Kessel.............	225,84	1,9
Barraud...........	225,39	3,6
1................	226,04	2,9
4................	224,86	4,3
	225,42	14,2

La longitude de Brême, qui serait, d'après cela, 268″,54 à l'ouest d'Altona, est naturellement affectée des erreurs sur la détermination du temps à Brême, et cette différence semble trop petite de plusieurs secondes. D'après mes triangulations, la tour de Ansgarius est de 273″,51 en temps à l'ouest de Göttingue, et l'observatoire d'Olbers à 271″,9.

FIN.



